Blatt 3 Aufgabe 4

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{pmatrix}\right] \quad \det(A)=\det(A^{tr})$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A}$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}\right]$$

$$Z_i \to Z_i - x_1 Z_{i-1} \quad (2 \le i \le n-1)$$

$$Z_n \to Z_n - x_1^2 Z_{n-1}$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \dots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \dots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & & & & \vdots \\ & x_2^{n-3}(x_2-x_1) & x_3^{n-3}(x_3-x_1) & \dots & x_n^{n-3}(x_n-x_1) \\ 0 & & & & \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2^2-x_1^2) & x_3^{n-2}(x_3^2-x_1^2) & \dots & x_n^{n-2}(x_n^2-x_1^2) \end{pmatrix}\right] =$$

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & \dots & x_n^{n-3} \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2+x_1) & x_3^{n-2}(x_3+x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n+x_1) \end{bmatrix}$$

$B_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$

Entwicklung nach der 1-en Spalte:

$$\det(A) = \prod_{1<j\leq n} (x_j - x_1) \det(B_1)$$

Ähnlich: $\det(B_1) = \prod_{2<j\leq n} (x_j - x_2) \det(B_2)$, wobei

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_3^{n-4} & x_4^{n-4} & \cdots & x_n^{n-4} \\ x_3^{n-3}(x_1+x_2+x_3) & x_4^{n-3}(x_1+x_2+x_4) & \cdots & x_n^{n-3}(x_1+x_2+x_n) \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$M_{n-2}(R)$$

etc

$$\det(A) = \prod_{1<j\leq n} (x_j - x_1) \prod_{2<j\leq n} (x_j - x_2) \cdots \prod_{n-1<j\leq n} (x_j - x_{n-1}) \det(B_{n-1})$$

$$B_{n-1} \in M_{n-(n-1)}(R) = M_1(R)$$

$$B_{n-1} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n)$$

$$\Rightarrow \det(A) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i) \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Seien $A, B \in M_n(K)$ und sei $r = \text{Rang}(A)$ $(1 \leq r \leq n)$.

Dann existieren $P, Q \in GL_n(K)$ mit $A = P \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] Q$.

Sei $C = QBP = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$ mit $B_{11} \in M_r(K)$

$B_{12} \in M_{r \times (n-r)}(K)$

$B_{21} \in M_{(n-r) \times r}(K)$

$B_{22} \in M_{n-r}(K)$

Dann ist $B = Q^{-1} C P^{-1}$.

Damit: $AB = P \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] Q \cdot Q^{-1} C P^{-1} = P \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] P^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{AB = P \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] P^{-1}}$

Ähnlich: $\boxed{BA = Q^{-1} \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & 0 \\ \hline B_{21} & 0 \end{array}\right] Q}$

$\chi_{AB} = \det(AB - x I_n) = \det(AB - P x I_n P^{-1}) \Rightarrow$

$\chi_{AB} = \det\left(P \left(\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] - x I_n \right) P^{-1} \right) \Rightarrow$

$\chi_{AB} = \det(P) \cdot \det\left(\left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - x I_n \right) \det(P)^{-1} \Rightarrow$

$\chi_{AB} = \det\left(\left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - x I_n \right) \Rightarrow$

$\chi_{AB} = \chi_{B_{11}} \cdot (-1)^{n-r} x^{n-r}$

Ähnlich: $\chi_{BA} = \chi_{B_{11}} \cdot (-1)^{n-r} X^{n-r}$.

$\Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$

Kommentar: Falls A (oder B) invertierbar ist, kann man mit $BA = A^{-1}(AB)A$ (oder $BA = B(AB)B^{-1}$) zeigen dass $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\chi_{AB} = X^2$ und $\mu_{AB} = \chi_{AB} = X^2$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\chi_{BA} = X^2$ und $\mu_{BA} = X \neq \mu_{AB}$.

Blatt 6 Aufgabe 7

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n = 0.}$ (1)

Wir zeigen, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \Rightarrow \{w_1, \ldots, w_n\}$ l.u $\xRightarrow{\dim V = n}$ $\{w_1, \ldots, w_n\}$ ist eine Basis von V.

Sei $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

$$B(v,v) = |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2 = \| \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \|^2 \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \| \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n - (\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n) \|^2 =$$

$$= \| \lambda_1 (v_1 - w_1) + \lambda_2 (v_2 - w_2) + \ldots + \lambda_n (v_n - w_n) \|^2$$

$$\overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \left(|\lambda_1| \, \|v_1 - w_1\| + |\lambda_2| \, \|v_2 - w_2\| + \ldots + |\lambda_n| \, \|v_n - w_n\| \right)^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \underbrace{(|\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2)}_{= B(v,v)} \cdot (\|v_1 - w_1\|^2 + \ldots + \|v_n - w_n\|^2)$$

$$\leq B(v,v) \cdot \left(\|v_1 - w_1\|^2 + \ldots + \|v_n - w_n\|^2 \right)$$

$$\Rightarrow B(v,v) \leq B(v,v) \cdot (\|v_1 - w_1\|^2 + \ldots + \|v_n - w_n\|^2)$$

$$\Rightarrow B(v,v) (\|v_1 - w_1\|^2 + \ldots + \|v_n - w_n\|^2 - 1) \geq 0$$

Es ist $\|v_1 - w_1\|^2 + \ldots + \|v_n - w_n\|^2 - 1 < \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 - 1}_{= 0}$

$\Rightarrow b(v,v) = 0.$

$\Rightarrow |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$

Aufgabe 6 Blatt 7

a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = b(u+v,u+v) + b(u-v,u-v)$

$= b(u,u) + \cancel{b(u,v)} + \cancel{b(v,u)} + b(v,v) +$

$+ b(u,u) - \cancel{b(u,v)} - \cancel{b(v,u)} + b(v,v)$

$= 2b(u,u) + 2b(v,v)$

$= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$

b) Skalarprodukt auf V

(A) $b(u,u) \geq 0$ und $b(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$$b(u,u) = \frac{1}{4}(N(2u)^2 - N(0)^2) \overset{(i)}{=} \frac{1}{4}(N(2u)^2) \overset{(ii)}{=} N(u)^2$$

Nach die Definition von N, $N(u) \geq 0 \Rightarrow (u,u) \geq 0.$

Nach (i) $(u,u) = 0$ genau dann, wenn $u = 0$

(B) $b(u,v) = b(v,u)$

$$b(u,v) = \frac{1}{4}(N(u+v)^2 - N(u-v)^2) = \frac{1}{4}(N(v+u)^2 - (N(-(v-u))^2))$$

$$\Rightarrow b(u,v) \overset{(ii)}{=} \frac{1}{4}(N(v+u)^2 - (|-1|N(v-u))^2) = \underbrace{\frac{1}{4}(N(v+u)^2 - N(v-u)^2)}_{b(v,u)}$$

(C) $B(v+u,w) = B(v,w) + B(u,w)$

- $B(v+u,w) = \frac{1}{4}\left(N(v+u+w)^2 - N(v+u-w)^2\right)$
- $B(v,w)+B(u,w) = \frac{1}{4}\left(N(v+w)^2 - N(v-w)^2 + N(u+w)^2 - N(u-w)^2\right).$

Wir zeigen:

$$N(v+u+w)^2 - N(v+u-w)^2 = N(v+w)^2 - N(v-w)^2 + N(u+w)^2 - N(u-w)^2.$$

Es ist: $N(v+u+w)^2 - N(v+u-w)^2 = N((v+u+w)^2 + N(w)^2 - N(w)^2 -$

$- N(v+u-w)^2 \implies$

$$N(v+u+w)^2 - N(v+u-w)^2 = \frac{1}{2}\left[N(v+u+2w)^2 + N(v+u+\cancel{w}-\cancel{w})^2\right] -$$

$$- \frac{1}{2}\left[N(\cancel{w}+v+u-\cancel{w})^2 + N(v+u-2w)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[N(v+u+2w)^2 + \cancel{N(v+u)^2} - \cancel{N(v+w)} - N(v+u-2w)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[N(v+u+2w)^2 - N(v+u-2w)^2\right]$$

Andererseits:

$$N(v+u)^2 - N(v-w)^2 + N(u+w)^2 - N(u-w)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\left[N(v+u+2w)^2 + N(v+w-u-w)^2\right] - \frac{1}{2}\left[N(v+u-2w)^2 + N(v-u)^2\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left(N(v+u+2w)^2 - N(v+u-2w)^2\right).$$

D) $B(\lambda u, v) = \lambda B(u,v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Fall 1: $\lambda = 0$

$B(0,v) = \frac{1}{4}\left(N(v)^2 - N(-v)^2\right) \overset{(ii)}{=} \frac{1}{4}\left(N(v)^2 - N(v)^2\right) = 0 = 0B(u,v)$.

Fall 2: $\lambda \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang: $\lambda = 1$ Klar

Induktionsschritt: Sei $\lambda \in \mathbb{N}$ sodass $B(\lambda u, v) = \lambda B(u,v)$.

$B((\lambda+1)u, v) = B(\lambda u + u, v) \overset{(c)}{=} B(\lambda u, v) + B(u,v) = \lambda B(u,v) + B(u,v)$

$\Rightarrow B((\lambda+1)u, v) = (\lambda+1)B(u,v)$.

Fall 3: $\lambda = -1$

$B(-u,v) = \frac{1}{4}\left(N(-u+v)^2 - N(-u-v)^2\right)$

$\overset{(ii)}{=} \frac{1}{4}\left(N(v-u)^2 - N(v+u)^2\right)$

$= -\frac{1}{4}\left(N(v+u)^2 - N(v-u)^2\right)$

$= -B(v,u) \overset{(B)}{=} -B(u,v)$.

Fall 4: $\lambda \in \mathbb{Z}$. $\lambda = 0$ ist Fall 1. Sei $\lambda \neq 0$.

$B(\lambda u, v) = B(-(-\lambda u), v) \underset{\text{Fall 3}}{=} -B(-\lambda u, v) \underset{\text{Fall 2}}{\overset{-\lambda \in \mathbb{N}}{=}} -(-\lambda)B(u,v) = \lambda B(u,v)$.

Fall 5: $\lambda \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$ sodass $\lambda = \frac{p}{q}$.

$B(\lambda u, v) = B(\frac{p}{q}u, v) \overset{\text{Fall 4}}{=} p\, B(\frac{1}{q}u, v)$..

Es ist $\mathcal{B}(u,v) = \mathcal{B}(q \cdot \frac{1}{q}u, v) \overset{\text{Fall 4}}{=} q\mathcal{B}(\frac{1}{q}u, v)$

$\Rightarrow \frac{1}{q}\mathcal{B}(u,v) = \mathcal{B}(\frac{1}{q}u, v).$

Deshalb: $p\mathcal{B}(\frac{1}{q}u, v) = \frac{p}{q}\mathcal{B}(u,v) = \lambda\mathcal{B}(u,v)$

Fall 6: $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda = 0$ ist Fall 1. Sei $\lambda \neq 0$ und seien $u, v \in V$.

Sei $f_{u,v}\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_{u,v}(x) = \frac{1}{x}\mathcal{B}(xu, v)$

$f_{u,v}$ ist stetig und nach Fall 5 gilt $f_{u,v}(q) = \mathcal{B}(u,v)$ $\forall q \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow f_{u,v}$ ist eine Konstante Funktion in $\mathbb{Q}$ mit $f_{u,v}(q) = \mathcal{B}(u,v)$

$\mathbb{Q}$ ist eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow f_{u,v}$ ist Konstante in $\mathbb{R}$ mit $f_{u,v}(\lambda) = \mathcal{B}(u,v)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}\mathcal{B}(\lambda u, v) = \mathcal{B}(u,v)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\Rightarrow \mathcal{B}(\lambda u, v) = \lambda\mathcal{B}(u,v)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Nach (A), (B), (C), (D) folgt, dass $\mathcal{B}$ ein Skalarprodukt auf V definiert.

$\sqrt{\mathcal{B}(v,v)} \overset{(A)}{=} \sqrt{N(v)^2} = |N(v)| \overset{N(v) \in \mathbb{R}_{\geq 0}}{=} N(v)$ $\forall v \in V.$

Blatt 11 Aufgabe 6

($\Rightarrow$) A nilpotent $\Rightarrow$ Die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von A sind 0.

Sei $1 \leq d \leq n$. und sei T die Jordan Normalform von A.

$\Rightarrow \exists\, S \in GL_n(\mathbb{C})$ sodass $A = STS^{-1}$

$$Spur(A^d) = Spur((STS^{-1})^d) \underset{\text{Aufgabe 1(b)}}{\overset{\text{Blatt 0}}{=}} Spur(ST^dS^{-1})$$

Nach Blatt 4, Aufgabe 3(c) gilt: $Spur(ST^dS^{-1}) = Spur(T^d)$

Deshalb: $\boxed{Spur(A^d) = Spur(T^d)}$ (1).

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^d = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Spur(T^d) = 0.$$

$\Rightarrow Spur(A^d) = 0 \quad \forall\, 1 \leq d \leq n$.

($\Leftarrow$) Sei $Spur(A^d) = 0$ für alle $1 \leq d \leq n$.

Sei $\chi_A = (-1)^n (x-\lambda_1)^{n_1} \dots (x-\lambda_r)^{n_r}$ das characteristishe Polynom von A und sei T die JNF von A.

$\Rightarrow \exists\, S \in GL_n(\mathbb{C})$ sodass $A = STS^{-1}$. für alle $1 \leq d \leq n$ gilt:

$$0 = Spur(A^d) \overset{(1)}{=} Spur(T^d) = n_1\lambda_1^d + n_2\lambda_2^d + \dots + n_r\lambda_r^d.$$

für alle $1 \leq d \leq n$.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} n_1\lambda_1^1 + n_2\lambda_2^1 + \dots + n_r\lambda_r^1 &= 0 \\ n_1\lambda_1^2 + n_2\lambda_2^2 + \dots + n_r\lambda_r^2 &= 0 \\ &\vdots \\ n_1\lambda_1^r + n_2\lambda_2^r + \dots + n_r\lambda_r^r &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\leftarrow d=1 \\ &\leftarrow d=2 \\ &\vdots \\ &\leftarrow d=r\leq n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_r \det\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}_{V(\lambda_1,\dots,\lambda_r)^{tr}}\Bigg)$$

$$\Rightarrow \det(B) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_r \det\left(V(\lambda_1,\dots,\lambda_r)^{tr}\right) = \lambda_1\dots\lambda_r \det(V(\lambda_1,\dots\lambda_r))$$

$$\Rightarrow \det(B) \neq 0, \text{ da } \underbrace{\det(V(\lambda_1,\dots,\lambda_r))}_{\prod\limits_{1\leq i<j\leq r}(\lambda_j-\lambda_i)} \neq 0 \text{ und } \lambda_j \neq \lambda_i \text{ für } i\neq j.$$

$\xRightarrow{\mathbb{C}\text{ Körper}}$ B invertierbar $\Rightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A = (-1)^n X^n$

$\Rightarrow$ A nilpotent.

Blatt 12 Aufgabe 6

a) Seien $p: W \longrightarrow U+W, \quad p(w) = w$

$i: U+W \longrightarrow U+W/U, \quad i(u+w) = u+w+U.$

p, i sind Homomorphismen $\Rightarrow h := i \circ p$ ist auch ein Homomorphismus.

$h: W \longrightarrow U+W/U$

• h ist surjectif

Sei $x \in U+W/U \Rightarrow x = \underset{\substack{\uparrow \\ U}}{u_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{w_1} + U. \xrightarrow{u_1 \in U} x = w_1 + U.$

$h(w_1) = (i \circ p)(w_1) = i(p(w_1)) = i(w_1) = w_1 + U = x$

• $\text{Kern}(h) = U \cap W$

* Sei $x \in U \cap W \Rightarrow h(x) = i(p(x)) = i(x) = x + U \overset{x \in U}{=} 0 + U.$

$\Rightarrow U \cap W \subseteq \text{Kern}(h).$

* Sei $x \in \text{Kern}(h) \Rightarrow h(x) = 0 + U \Rightarrow i(p(x)) = 0 + U \Rightarrow i(x) = 0 + U$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x + U = 0 + U \Rightarrow \boxed{x \in U} \\ x \in \text{Kern}(h) \subseteq W \Rightarrow \boxed{x \in W} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in U \cap W$$

$\Rightarrow \text{Kern}(h) \subseteq U \cap W$

$\underbrace{W/\text{Kern}(h) \cong \text{Bild}(h)}_{\text{Homomorphiessatz}} \Rightarrow W/U \cap W \cong U+W/U.$

Sei $\phi: V/U \longrightarrow V/W$, $\phi(v_1+U) = v_1+W$.

ϕ ist ein Homomorphismus.

ϕ surjectif

Sei $v_1+W \in V/W$. $\phi(v_1+U) = v_1+W$

$\mathrm{Kern}(\phi) = W/U$

$$\begin{aligned}\mathrm{Kern}(\phi) &= \{v_1+U \in V/U \ : \ \phi(v_1+U) = 0+W\} \\ &= \{ \ - \ \shortmid \ - \ : \ v_1+W = 0+W\} \\ &= \{ \ - \ \shortmid \ - \ : \ v_1 \in W\} \\ &= \{v_1+U \ , \ v_1 \in W\} \\ &= W/U\end{aligned}$$

Nach Homomorphiessatz gilt:

$$V/U \Big/ \mathrm{Kern}(\phi) \simeq \mathrm{Bild}(\phi) \quad \Rightarrow$$

$$(V/U)\Big/(W/U) \simeq V/W$$