Blatt 13 - Bonusaufgaben

Aufgabe 3

a) $\det(A_m) = \det\begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 3m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= -1\cdot\det\begin{pmatrix} m & m & m^2-m \\ m & m & 0 \\ m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} m & m & m^2-m \\ m-1 & 3m-1 & m^2-m \\ m & m & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -1\cdot(m^2-m)\det\begin{pmatrix} m & m \\ m & 3m-1 \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} m & m & m^2-m \\ -1 & 2m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-m^2 \end{pmatrix}$$

$$= -(m^2-m)(3m^2-m-m^2) - m\det\begin{pmatrix} 2m-1 & 0 \\ 0 & m-m^2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} m & m^2-m \\ 0 & m-m^2 \end{pmatrix}$$

$$= -(m^2-m)(2m^2-m) + m(m^2-m)(2m-1) + m(m^2-m)$$

$$= -m^2(m-1)(2m-1) + m^2(m-1)(2m-1) + m^2(m-1)$$

$$= m^2(m-1)(1-2m+2m-1+1)$$

$$= m^2(m-1)$$

b) R ist Körper. Nach Satz 4.2.4 und Folgerung 4.3.5 gilt:

A_m invertierbar $\iff \det A_m \neq 0 \iff m \in R\setminus\{0,1\}$

c) $R=\mathbb{Z}$. Nach Blatt 3, Aufgabe 2(a) gilt:

A_m invertierbar $\iff \det(A_m) = \pm 1 \iff m^2(m-1) = \pm 1 \iff$

$$\Leftrightarrow \left(\{m^2=1\} \wedge \{m-1=-1\}\right) \vee \left(\{m^2=1\} \wedge \{m-1=1\}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\{m=\pm 1\} \wedge \{m=0\}\right)}_{\emptyset} \vee \underbrace{\left(\{m=\pm 1\} \wedge \{m=2\}\right)}_{\emptyset}$$

Die Matrix A_m ist für kein $m \in \mathbb{Z}$ invertierbar.

Aufgabe 4

a) Seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und $A_1, A_2, B_1, B_2 \in V$. Es gilt:

$$b(aA_1 + bA_2, cB_1 + dB_2) = \text{Spur}\left((aA_1 + bA_2)(cB_1 + dB_2)\right)$$

$$= \text{Spur}\left(ac A_1 B_1 + ad A_1 B_2 + bc A_2 B_1 + bd A_2 B_2\right)$$

Nach Blatt 4, Aufgabe 3 (a) gilt: die Abbildung

$\text{Spur}: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \text{Spur}(A)$ ist linear.

Deshalb: $\text{Spur}\left(ac A_1 B_1 + ad A_1 B_2 + bc A_2 B_1 + bd A_2 B_2\right) =$

$= ac\, \text{Spur}(A_1 B_1) + ad\, \text{Spur}(A_1 B_2) + bc\, \text{Spur}(A_2 B_1) + bd\, \text{Spur}(A_2 B_2)$

Deshalb: $b(aA_1 + bA_2, cB_1 + dB_2) = ac\, b(A_1, B_1) + ad\, b(A_1, B_2) +$

$+ bc\, b(A_2, B_1) + bd\, b(A_2, B_2)$ $\Rightarrow$ b ist Bilinearform.

Nach Blatt 4, Aufgabe 3 (b) gilt: b ist symmetrisch.

b) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $b(v,v) = \text{Spur}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{Spur}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

c) Methode 1

Sei $B = \left\{ \overset{B_1}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \overset{B_2}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \overset{B_3}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}, \overset{B_4}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}} \right\}$

B ist eine Basis von V (LAAG I).

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} \beta(B_1,B_1) & \beta(B_1,B_2) & \beta(B_1,B_3) & \beta(B_1,B_4) \\ \beta(B_2,B_1) & \beta(B_2,B_2) & \beta(B_2,B_3) & \beta(B_2,B_4) \\ \beta(B_3,B_1) & \beta(B_3,B_2) & \beta(B_3,B_3) & \beta(B_3,B_4) \\ \beta(B_4,B_1) & \beta(B_4,B_2) & \beta(B_4,B_3) & \beta(B_4,B_4) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det M_B(\beta) = -1 \neq 0 \Rightarrow \beta$ ist nicht - ausgeartet

$\det(1) = 1 > 0$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$

$\Rightarrow \beta$ ist nicht positiv-definit

Methode 2

Sei $A \in V$, sodass $\boxed{\mathcal{B}(A,B) = 0 \quad \forall B \in V.}$ $\bigstar$

Wir zeigen, dass $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{B}\left(A, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Spur}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\right) = a \quad \overset{\star}{\Longrightarrow} \quad \boxed{a = 0}$$

$$\mathcal{B}\left(A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Spur}\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\right) = b \quad \overset{\star}{\Longrightarrow} \quad \boxed{b = 0}$$

$$\mathcal{B}\left(A, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Spur}\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = c \quad \overset{\star}{\Longrightarrow} \quad \boxed{c = 0}$$

$$\mathcal{B}\left(A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Spur}\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = d \quad \overset{\star}{\Longrightarrow} \quad \boxed{d = 0}$$

$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist nicht-ausgeartete.

$$\mathcal{B}(A,A) = \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & d^2 + bc \end{pmatrix} = a^2 + d^2 + 2bc$$

$\Rightarrow \mathcal{B}(A,A)$ ist nicht immer positiv

z.B. $a = d = 0$ und $b = 1$, $c = -1$ $\left(A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow \mathcal{B}(A,A) = -2 < 0$.

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist nicht positiv-definit.

d) Methode 1

Gram-Schmidt für $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$

- $V_1 = B_1$

- $V_2 = B_2 - \frac{b(B_2, V_1)}{b(V_1, V_1)} \cdot V_1 \Rightarrow$

$$V_2 = B_2 - \frac{\cancel{b(B_2, B_1)}^{0}}{b(B_1, B_1)} B_1 \Rightarrow$$

$$V_2 = B_2$$

- $V_3 = B_3 - \frac{b(B_3, V_1)}{b(V_1, V_1)} \cdot V_1 - \frac{b(B_3, V_2)}{b(V_2, V_2)} V_2 \Rightarrow$

$$V_3 = B_3 - \frac{\cancel{b(B_3, B_1)}^{0}}{b(B_1, B_1)} B_1 - \frac{b(B_3, B_2)}{b(B_2, B_2)} B_2 \Rightarrow$$

$$b(B_2, B_2) = 0$$

Gram-Schmidt ist für B unmöglich !

Methode 2

Sei $\boxed{V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow{(b)} b(V_1, V_1) \neq 0.$

Sei $U_1 = \langle V_1 \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow V = U_1 \oplus U_1^{\perp}$

$$U_1^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : b\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$$

$$\Rightarrow U_1^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : \quad \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\Rightarrow U_1^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : \quad a = 0 \right\}$$

$$\Rightarrow U_1^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Sei $\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \in U_1^\perp$: Es ist $b(v_2, v_2) = \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

Sei $U_2 = \langle v_2 \rangle_{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad U_1^\perp = U_2 \oplus U_2^\perp$

$$U_2^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_1^\perp : \quad b\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} \quad \Rightarrow$$

$$U_2^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_1^\perp : \quad \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & c \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} \quad \Rightarrow$$

$$U_2^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_1^\perp : \quad b + c = 0 \right\} \quad \Rightarrow$$

$$U_2^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & d \end{pmatrix} ; \quad b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Sei $\boxed{v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \in U_2^\perp$: Es ist $b(v_3, v_3) = \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

Sei $U_3 = \langle v_3 \rangle_{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad U_2^\perp = U_3 \oplus U_3^\perp$

$$U_3^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & d \end{pmatrix} \in U_2^\perp ; \quad b\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} \quad \Rightarrow$$

$U_3^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & d \end{pmatrix} \in U_2^\perp : \; \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} \Rightarrow$

$U_3^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & d \end{pmatrix} \in U_2^\perp : \; d = 0 \right\} \Rightarrow$

$U_3^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} ; \; b \in \mathbb{R} \right\}$

Sei $\boxed{v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \in U_3^\perp$. Es ist $\beta(v_4, v_4) = \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$

Sei $U_4 = \langle v_4 \rangle_{\mathbb{R}}$.

Es ist $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4 = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle v_2 \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle v_3 \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle v_4 \rangle_{\mathbb{R}}$.

Die $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ist eine Orthogonalbasis von V bezüglich β.

Es gibt keine Orthonormalbasis von V, da β ist nicht positiv-definit:

Angenommen, es gäbe eine ONB $\tilde{B}$ von V zu β.

Dann wäre $M_{\tilde{B}}(\beta) = I_4$. Nach dem Satz von Sylvester wäre dann aber β positiv-definit $\lightning$

Aufgabe 5

8

a) $\det(A - x I_4) = \det\begin{pmatrix} 4-x & -4 & -11 & 11 \\ 3 & -12-x & -42 & 42 \\ -2 & 12 & 37-x & -34 \\ -1 & 7 & 20 & -17-x \end{pmatrix}$

$$= \det\begin{pmatrix} 4-x & -4 & 0 & 11 \\ 3 & -12-x & 0 & 42 \\ -2 & 12 & 3-x & -34 \\ -1 & 7 & 3-x & -x-17 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 4-x & -4 & 0 & 11 \\ 3 & -12-x & 0 & 42 \\ -1 & 5 & 0 & x-17 \\ -1 & 7 & 3-x & -x-17 \end{pmatrix}$$

$$= (x-3)\det\begin{pmatrix} 4-x & -4 & 11 \\ 3 & -12-x & 42 \\ -1 & 5 & x-17 \end{pmatrix}$$

$$= (x-3)\cdot\left[(4-x)\cdot(-x^2+5x-6) + 4\cdot(3x-9) + 11\cdot(3-x)\right]$$

$$= (x-3)\cdot\left[(x-4)(x-2)(x-3) + 12(x-3) - 11(x-3)\right]$$

$$= (x-3)^2(x^2-6x+8+12-11)$$

$$= (x-3)^2(x^2-6x+9)$$

$$= (x-3)^4$$

$\Rightarrow \chi_\phi = (x-3)^4 \rightarrow \chi_\phi$ zurfallend $\Rightarrow \phi$ besitzt eine Jordan Normalform.

9

b) μ_ϕ teilt χ_ϕ und μ_ϕ, χ_ϕ haben die gleichen Nullstellen. $\Rightarrow \mu_\phi = (x-3)^m$, $1 \le m \le 4$.

Fall 1: $\mu_\phi = X-3 \Rightarrow A - 3I_4 = 0_{4\times4} \Rightarrow A = 3I_4$ ↯

Fall 2: $\mu_\phi = (X-3)^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & -11 & 11 \\ 3 & -15 & -42 & 42 \\ -2 & 12 & 34 & -34 \\ -1 & 7 & 20 & -20 \end{pmatrix}^2 = 0_{4\times4}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} = 0_{4\times4}$ ↯

Fall 3: $\mu_\phi = (x-3)^3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & -11 & 11 \\ 3 & -15 & -42 & 42 \\ -2 & 12 & 34 & -34 \\ -1 & 7 & 20 & -20 \end{pmatrix}^3 = 0_{4\times4}$ ✓

$\Rightarrow \mu_\phi = (x-3)^3$

c) $\chi_\phi = (x-3)^4$ und $\mu_\phi = (x-3)^3$

Wir lesen folgendes ab:

- Es gibt nur eine EW: 3
- Es gibt ein Block den Größe 3×3 zum EW 3, da $\mathrm{Grad}\,\mu_\phi = 3$. Dieses Block ist das größest.
- $JNF \in M_4(\mathbb{R}) \Rightarrow$ Es gibt ein Block den Größe 1×1 zum EW 3

$\Rightarrow$ Es gibt nur 2 Blöcke.

(d) $JNF = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}\right)$.