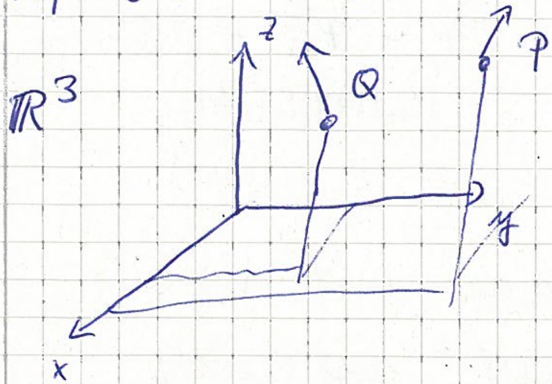
Kapitel 8: Affine Räume und „Hauptachsentransformation"



Physikalische Anwendungen: "Kräfte" wirken an Punkten des Anschauungsraum = Pfeile mit Länge und Richtung, die von einem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ ausgehen, nicht nur von O.

Also: * Trennung zwischen Punkten und Pfeilen
* O kein ausgezeichneter Punkt. alle Punkte gleichberechtigt.

§1 Affine Räume

Def. 1.1 Sei K Körper und V K-Vektorraum. Eine Menge $\mathcal{A} \neq \emptyset$ heißt "affiner Raum" über V, wenn es eine Abbildung gibt

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V, \quad (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(A1) Zu jedem $P \in \mathcal{A}$ und $v \in V$ gibt es genau ein $Q \in \mathcal{A}$ mit $\overrightarrow{PQ} = v$.

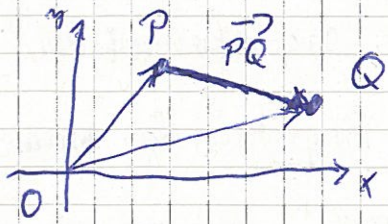
(A2) Für $P, Q, R \in \mathcal{A}$ gilt $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

Elemente von $\mathcal{A}$ heißen Punkte.
$\overrightarrow{PQ} \in V$ ist der "Pfeil" von P nach Q.

Setze $\dim \mathcal{A} := \dim V$

Beisp. 1.2 (a) $\mathcal{A} := V$ zu $P, Q \in V$ setze
$\overrightarrow{PQ} := Q - P \in V$ (A1), (A2) gelten.

Also z.B. $\mathcal{A} = V = \mathbb{R}^2$



$\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$
Vektoraddition.

(b) Sei W ein K-Vektorraum und $V \leq W$ Teilraum. Sei $w_0 \in W$ fest und setze

$$\mathcal{A} := w_0 + W := \{w_0 + w \mid w \in W\}$$

affiner Unterraum von W (wie in Kap. 7, §1)

zu $P, Q \in \mathcal{A}$ setze $\vec{PQ} = Q - P \in W$

$P = w_0 + v$, $Q = w_0 + v'$ $\Rightarrow$ $Q - P = v' - v \in V$.
$(v, v' \in V)$ also $\mathcal{A}$ affiner Raum über V
(A1), (A2) gelten.

z.B. $W = K^{n+1}$ $\quad V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in K \right\}$

$\mathcal{A} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in K \right\}$ (erste Komponente gleich 1)
ist affiner Raum über V.

<u>Bemerkung 1.3</u> Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum über V.

(a) Zu festem $P_0 \in \mathcal{A}$ ist $\begin{aligned} \mathcal{A} &\to V \\ Q &\mapsto \vec{P_0Q} \end{aligned}$
eine bijektive Abbildung.
(folgt sofort aus (A1))

(b) Zu festem $v \in V$ können wir Abbildung $\tau_v : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ wie folgt definieren. Sei $P \in \mathcal{A}$.
Mit (A1) gibt es genau ein $Q \in \mathcal{A}$ mit $\vec{PQ} = v$.

setze dann $\tau_v(P) = Q$. τ_v heißt die zu v gehörige "Translation" (= Verschiebung).
Schreibe auch $\tau_v(P) = P + v$.

(A1) $\Rightarrow$ τ_v bijektive Abbildung.

Ist $w \in V$ weiterer Vektor, so gilt $\tau_w \circ \tau_v = \tau_{v+w}$

denn: $\tau_v(P) = Q \quad v = \overrightarrow{PQ}$
$\tau_w(Q) = R \quad w = \overrightarrow{QR}$ $\rightarrow v + w = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
nach (A2)

und damit $\tau_{v+w}(P) = R = \tau_w(Q) = \tau_w(\tau_v(P))$ ✓.

(c) Für alle $P, Q \in \mathcal{A}$ gilt $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PP} = 0 \in V$

denn: $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$ nach (A2) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PP} = 0$

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$, also $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ ✓.

<u>Def. 1.4</u> Sei K Körper, V, V' K-Vektorräume.
Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum über V und $\mathcal{A}'$ affiner Raum über V'. Eine Abbildung $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ heißt affin, wenn es eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V'$ gibt mit $\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}$
für alle $P, Q \in \mathcal{A}$.

<u>Beispiel 1.5</u> Sei $V = K^n = \mathcal{A}$ und $V' = K^m = \mathcal{A}'$ wie in Beispiel 1.2(a) $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ Abbildung.
Dann gilt:

α affin $\Leftrightarrow$ es gibt eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ und ein $b \in K^m$ mit $\alpha(v) = Av + b$ für alle $v \in K^n$.

<u>Denn</u>: "$\Rightarrow$" Sei $\varphi : V \rightarrow V'$ zug. lineare Abbildung.
$V = K^n$, $V' = K^m$ $\rightarrow$ $\varphi(v) = Av$ für alle $v \in K^n$, wobei $A \in K^{m \times n}$. Sei außerdem $b := \alpha(0) \in K^m$.

Sei $P \in \mathcal{A}$ $\quad v = \overrightarrow{OP} = P - O = P$

$\Rightarrow \quad Av = \varphi(v) = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\alpha(O)\,\alpha(P)} = \overrightarrow{b\,\alpha(P)}$

also $\alpha(P) = \tau_{\varphi(v)}(b) = b + \varphi(v) = b + Av$. ✓.

„$\Leftarrow$" Def. $\varphi : V \to V'$ durch $\varphi(v) = Av$ für alle $v \in V$.
Für $P, Q \in \mathcal{A}$ ist dann

$$\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \varphi(Q-P) = \varphi(Q) - \varphi(P)$$
$$= \varphi(Q) + b - (\varphi(P)+b) = \alpha(Q) - \alpha(P) = \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} \ ✓.$$

<u>Beisp. 1.6</u> Sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, $V = V'$, $v \in V$ fest.
Betrachte Translation $\tau_v \; \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

<u>Beh.</u>: τ_v ist affine Abbildung mit $\varphi = id_V$.

<u>denn</u>: Seien $P, Q \in \mathcal{A}$.
$\tau_v(P) = P'$ und $\tau_v(Q) = Q'$, also
$v = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$ Damit

$$\overrightarrow{\tau_v(P)\tau_v(Q)} = \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{P'Q} + \overrightarrow{QQ'} = \underbrace{\overrightarrow{P'P}}_{=-v} + \overrightarrow{PQ} + v$$
$$= \overrightarrow{PQ} \ ✓.$$

<u>Def. 1.7</u> $\mathcal{A}$ affiner Raum über V. Eine Teilmenge $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{A}$ heißt affiner Unterraum, wenn es ein $P_0 \in \mathfrak{U}$ gibt, so daß
$$U := \{\overrightarrow{P_0P} \mid P \in \mathfrak{U}\} \text{ Teilraum von } V \text{ ist.}$$

<u>Bemerk</u> (1) Sei $Q_0 \in \mathfrak{U}$ ebenfalls so, daß
$$U' := \{\overrightarrow{Q_0P} \mid P \in \mathfrak{U}\} \text{ Teilraum von } V \text{ ist.}$$
Dann folgt $U = U'$.

denn: $\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0P_0} + \overrightarrow{P_0P} = \underbrace{-\overrightarrow{P_0Q_0}}_{\in U} + \underbrace{\overrightarrow{P_0P}}_{\in U} \in U$

für alle $P \in \mathfrak{U}$,

also $U' \subseteq U$. Genauso umgekehrt $U' \subseteq U$

also $U = U'$!

② $\mathcal{U}$ selbst affiner Raum über U, mit Abbildung $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to U$, $(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} \in U$.
(denn: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = -\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{P_0Q} \in U$.)

③ Ist $U \subseteq V$ Teilraum und $P_0 \in \mathcal{A}$ fest, so ist $\mathcal{U} := \{ P_0 + u \mid u \in U \}$ affiner Unterraum.
denn: $0 \in U \Rightarrow P_0 \in \mathcal{U}$ $\quad Q \in \mathcal{U}$ bel.
$\Rightarrow Q = P_0 + u$ mit $u = \overrightarrow{P_0Q} \Rightarrow U = \{ \overrightarrow{P_0Q} \mid Q \in \mathcal{U} \}$ u.v.

z.B. in $\mathcal{A} = V = \mathbb{R}^2$ wie in Beisp. 1.2.

1-dim. affine Unterräume sind alle Geraden (nicht unbedingt durch 0).

Insbesondere: Durchschnitt von affinen Unterräumen kann leer sein!

<u>Def 1.8</u> Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum über V und $n = \dim V < \infty$. Sei $P_0 \in \mathcal{A}$ fest. Eine Menge $S = \{ P_0, P_1, \dots, P_n \} \subseteq \mathcal{A}$ heißt <u>affines Koordinatensystem</u>, wenn $B = \{ \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \}$ eine Basis von V ist; P_0 heißt dann "Ursprung".
Jedes $P \in \mathcal{A}$ läßt sich dann eindeutig schreiben also $P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i \overrightarrow{P_0P_i}$ mit $s_i \in K$.
(denn nach Bem. 1.3 ist $P = P_0 + v$ mit $v \in V$ eindeutig; schreibe dann v als Linearkombination in der Basis B.)

Werden ab jetzt Grundkörper $K = \mathbb{R}$ nehmen und annehmen, daß V ein endl.-dim. Euklidischer Raum ist, d.h. es gibt eine positiv-definite symmetrische Bilinearform $\beta: V \times V \to \mathbb{R}$ (Skalarprodukt) und wir können $\|v\| = \sqrt{\beta(v,v)}$ als Norm von $v \in V$ definieren:

Ein affiner Raum $\mathcal{A}$ über einem solchen V heißt dann auch Euklidischer Punktraum.

Definiere Abstand $d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|$ für $P, Q \in \mathcal{A}$.

Ist $n = \dim V$, so heißt $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ ein kartesisches Koordinatensystem, wenn $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ eine Orthonormalbasis von V bzgl β ist.

Eine affine Abbildung $\alpha: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heißt Bewegung, wenn zug. lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ orthogonal ist, d.h. $\beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v,w)$ für alle $v, w \in V$.

(siehe Kapitel, §7).

Beachte: Unter einer Bewegung geht ein kartesisches Koordinatensystem wieder in ein kartesisches Koordinatensystem über.

Beisp. 1.9 Sei $\mathcal{A} = V = \mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt

$$\beta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

(a) $\{0, e_1, e_2\}$ ist ein kartesisches Koordinatensystem. Ursprung $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

~~(b) ... ist ebenfalls kartesisches Koordinatensystem, Ursprung ...~~

(b) $\alpha\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ist Bewegung

↑ orthogonale Matrix ($A \cdot A^{tr} = I_2$).

§2 Quadriken

Grundkörper $K = \mathbb{R}$.

Betrachte Lösungsmengen von polynomialen Gleichungen

__Beisp. 2.1__ (a) $Q = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \}$

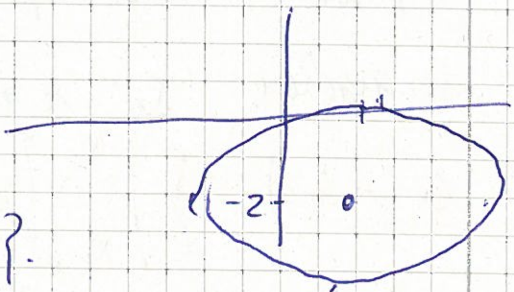
vereinfache: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

also Q Kreis mit Radius 3 und Mittelpunkt $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(b) $Q = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0 \}$.

vereinfache $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

also Q Ellipse mit Mittelpunkt $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ und Halbachsen $a = 3$, $b = 2$.



(c) $Q = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid$
$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0 \}$.

vereinfachen ist hier schwieriger, weil wir den gemischten Term xy haben!

Trick: $5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = [x \; y] \begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 16$.

Verwende Spektralsatz, um Matrix zu diagonalisieren. symmetrische Matrix mit Einträgen in $\mathbb{R}$

Sei $A = \begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$ Eigenwerte $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$.

$T := \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ orthogonale Matrix

mit $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Schreibe $T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Koordinatentransformation

also $x = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v$ $\quad y = -\sqrt{3}/2\, u + 1/2\, v$.

Setze in Gleichung ein und erhalte neue

Gleichung $\quad 8u^2 + 4v^2 = 16$, d.h. $\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{4} = 1$.

Also Q ist ebenfalls Ellipse mit Halbachsen $a = \sqrt{2}$ und $b = 2$.

Matrix T = Drehung um $-60°$

$[\cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = -\sqrt{3}/2$ für $\varphi = -60°]$

Also: neue Koordinaten entstehen aus alten nach dieser Drehung.

<u>Def. 2.2</u> Seien $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch und $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sowie $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Sei $A \neq 0$. Dann heißt

$$Q(A,b,c) := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0 \right\}$$

eine Quadrik oder auch Hyperfläche 2. Grades im $\mathbb{R}^n$. Für $n=2$ spricht man auch von "Kegelschnitten" siehe z.B. wikipedia-Artikel.

<u>Beisp. 2.3</u> $\quad n=2$.

$Q = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$ Kreis mit Radius 1

$= Q(A,b,c)$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c = 1$

Beisp. 2.1(a) oben $\quad Q = Q(A,b,c)$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = -4$.

Beisp. 2.2(b) oben

$Q = Q(A,b,c)$ mit $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \end{bmatrix}$, $c = 4$.

Beisp. 2.3(c) bereits behandelt.

$Q = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$ $(a, b > 0)$

Ellipse mit Halbachsen a, b

$Q = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$ $(a, b > 0)$

Hyperbel mit Halbachsen a, b

$Q = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0 \right\}$ $(a, b > 0)$

zwei sich schneidende Geraden.

$Q = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - dy = 0 \right\}$ $(d \neq 0)$ Parabel

Analog für $n = 3$: Kugelschale, Ellipsoid, Hyperboloid etc.

Frage: Wie kann man beliebige Quadrik auf möglichst einfache Form transformieren? Welche Normalformen gibt es dann?

Bemerkung 2.4 Wir arbeiten stets mit $\mathcal{A} = V = \mathbb{R}^n$ und Standardskalarprodukt $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

"Transformieren": Koordinatentransformation mittels einer Bewegung $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, d.h. es gibt orthogonale Matrix $P \in M_n(\mathbb{R})$ $(P^{tr} \cdot P = I_n)$ und $u \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\alpha(v) = Pv + u \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Schreibe $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right)$ also

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j + u_i \quad \text{für } 1 \le i \le n.$$

Setze dies in Gleichung der Quadrik ein. Erhalte neue Gleichung in den Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$.

Hauptsatz 2.5 (Hauptachsentransformation, oder Klassifikation der Quadriken).

Sei $Q = Q(A, b, c) \subseteq \mathbb{R}^n$ wie in Def. 2.2.
Dann gibt es eine Bewegung $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
so daß beim Wechsel der Koordinaten die ursprüngliche Gleichung für Q in eine Gleichung einer der beiden folgenden Formen übergeht:

(1) $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 + c' = 0$

oder (2) $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 + \gamma y_{n} = 0$
mit $r < n$ und $\gamma > 0$

wobei $\lambda_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq r$ und $r = \text{Rang}(A)$ ist.
(der 2. Fall kann also nur bei $r < n$ auftreten).

Beweis: $Q = Q(A, b, c)$

$$= \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0}_{(*)} \right\}$$

$$= x^{tr} A x + 2 b^{tr} \cdot x + c = 0.$$

1. Schritt. A symmetrisch. Nach Spektralsatz gibt es also eine orthogonale Matrix $P \in M_n(\mathbb{R})$
mit $A' = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$

P orthogonal, d.h. $P^{-1} = P^{tr}$. $r = \text{Rang}(A)$

$= \text{Rang}(A')$

d.h. genau r der λ_i sind $\neq 0$,
numeriere so, daß $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$, $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

Betrachte Koordinatentransformation

$v = Pw$ mit $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ Setze in (*) ein:

$$0 = v^{tr} A v + 2 b^{tr} v + c = (Pw)^{tr} A Pw + 2b^{tr} Pw + c$$

$$= w^{tr} \underbrace{P^{tr} A P}_{= A' = \text{diagonal}} w + 2 b^{tr} P w + c = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} b_k' y_k + c$$

wobei $[b_1', \dots, b_n'] = [b_1, \dots, b_n] P$.

$\rightsquigarrow$ 1. Vereinfachung (keine gemischten Terme mehr mit $y_i y_j$ für $i \neq j$)

<u>2. Schritt:</u> Nehmen wir nun an, (*) sei schon vereinfacht wie nach dem 1. Schritt, also

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} b_k' x_k + c = 0.$$

Neue Koordinatentransformation $v = w + u$

mit $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ wobei u_i noch zu bestimmen.

Setze in (*) ein:

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{(y_i + u_i)^2}_{= y_i^2 + 2 y_i u_i + u_i^2} + 2 \sum_{k=1}^{r} b_k' (y_i + u_i) + 2 \sum_{k=r+1}^{n} b_k' y_k + c$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + 2 \sum_{k=1}^{r} (b_k' + \lambda_k u_k) y_k + 2 \sum_{k=r+1}^{n} b_k' y_k$$

$$\underbrace{+ c + 2 \sum_{k=1}^{r} b_k' u_k + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i^2}_{= c'}$$

Setze $u_k = -b_k' / \lambda_k$ für $1 \le k \le r$.

Dann: $\quad 0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + 2 \sum_{k=r+1}^{n} b_k' y_k + c'$

(2. Vereinfachung: quadratische und lineare Terme sind getrennt)

3. Schritt Nehmen wir nun an, (*) sei schon vereinfacht wie nach dem 2. Schritt, also

$$(*) \quad 0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + 2 \sum_{k=r+1}^{n} b_k' y_k + c'.$$

Sind alle $b_k' = 0$ für $k = r+1, \dots, n$, so haben wir Form (1) erreicht. Sei nun also $b_k' \neq 0$ für mindestens ein $k \in \{r+1, \dots, n\}$.

Insbesondere bedeutet dies $r < n$.

1. Fall: $\quad b_n' \neq 0$ und $b'_{r+1} = \dots = b_{n-1}' = 0$.

Also $(*)$ $\quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + 2 b_n' x_n + c' = 0$.

Betrachte Koordinatentransformation

$$v = Pw + u \quad \text{mit} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \varepsilon \end{bmatrix}$$

wobei $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{falls } b_n' > 0 \\ -1 & \text{falls } b_n' < 0 \end{cases}$ und $u = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -c'/2b_n' \end{bmatrix}$.

P orthogonale Matrix, also Bewegung.

Setze ein in $(*)$

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + 2b_n' \left(\varepsilon y_n - c'/2b_n' \right) + c'$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + \underbrace{2 \varepsilon b_n'}_{>0} y_n$$

also Form (2) erreicht.

2. Fall: $b_k' \neq 0$ für ein $k \in \{r+1, \dots, n-1\}$

Sei $q := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{r+1}' \\ \vdots \\ b_n' \end{bmatrix}$ $\quad q' := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \|q\| \end{bmatrix}$.

Dann $\|q\| = \|q'\|$, $q \neq q'$ und $r_0 := q - q' \neq 0$.

Nach Ü7A5 gibt es Spiegelung $\varphi_{r_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi_{r_0}(q) = q'$ und $\varphi_{r_0}(q') = q$.

Sei $P \in M_n(\mathbb{R})$ Matrix von φ_r. φ_{r_0} orthogonal also P orthogonale Matrix.

Betrachte Koordinatentransformation $v = Pw$ ($\to$ Bewegung).

Beachte: $\varphi_{r_0}(v) = v - 2\dfrac{\beta(v, r_0)}{\beta(r_0, r_0)} r_0$

$v = e_i$ i-ter Einheitsvektor $\Rightarrow$ $\beta(e_i, r_0) = 0$ für $1 \leq i \leq r$.

Also $\varphi_{r_0}(e_i) = e_i$ für $1 \leq i \leq r$. d.h. $x_i = y_i$ für $1 \leq i \leq r$.

Setze in $(*)$ ein:

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + 2 \underbrace{\sum_{k=r+1}^{n} b_k x_k}_{= q^{tr} \cdot v \, = \, q^{tr} P w \, = (P^{tr} q) w} + c'$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + 2 (P^{tr} q)^{tr} w + c'$$

Nun ist $P^{-1} = P^{tr}$ und $P^2 = I_n$, also $P = P^{tr}$ und damit $P^{tr} q = Pq = q'$.

$$\Rightarrow (P^{tr} q)^{tr} w = q' w = \|q\| \cdot y_n.$$

d.h. $\quad 0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + 2\|q\| y_n + c'$

Wende dann 1. Fall $\rightsquigarrow$ erhalte 1. Form

fertig $\square$

<u>Beispiel 2.6</u> Betrachte

$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 4x_2 + 1 = 0 \right\}.$$

$$= Q(A, b, c) \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -2 \end{bmatrix}, \; c = 1$$

1. Vereinfachung $\quad \det(A - X I_2) = \det \begin{bmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 1-X \end{bmatrix}$

$$= (1-X)^2 - 1 = X^2 - 2X + 1 - 1 = X^2 - 2X$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 0 \quad \text{Rang}(A) = 1$$

Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ orthogonale Matrix mit

$$P^{-1} A P = A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformation $\quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2.$$

Setze ein $\rightsquigarrow \quad 2y_1^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{7}{\sqrt{2}} y_2 + 1 = 0$

2. Vereinfachung: $\quad y_1 = z_1 + u, \quad y_2 = z_2.$

Setze ein $\quad 2(z_1 + u)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + u) + \frac{7}{\sqrt{2}} z_2 + 1$

$$= 2z_1^2 + 2z_1 u + u^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} u + \frac{7}{\sqrt{2}} z_2.$$

Setze $u = \frac{1}{2\sqrt{2}} \rightsquigarrow$

$$0 = 2z_1^2 + \frac{7}{\sqrt{2}} z_2 + u^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} u + 1$$

$$= 2z_1^2 + 7/\sqrt{2}\, z_2 + 7/8$$

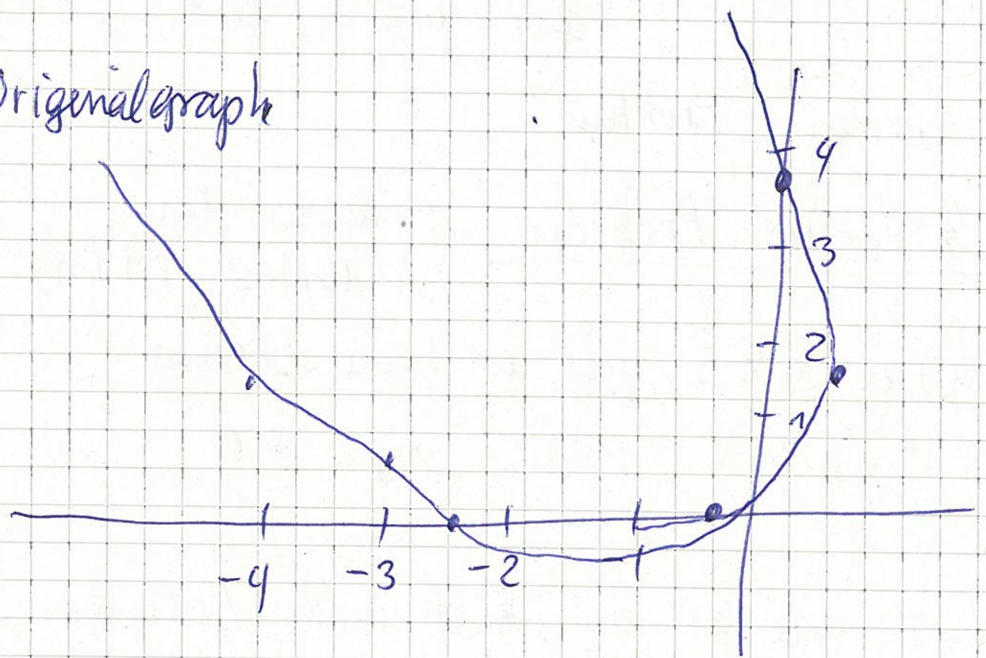
3. Vereinfachung $\quad z_2 = z_2' + r \qquad z_1 = z_1'$

$$\frac{7}{\sqrt{2}} z_2' + \underbrace{\frac{7}{\sqrt{2}} r + 7/8}_{=0} \Rightarrow \quad r = -\sqrt{2}/8.$$

also jetzt $$2 z_1'^2 + \frac{7}{\sqrt{2}} z_2' = 0.$$

$$z_2' = -\frac{2\sqrt{2}}{7} z_1'^2$$ Gleichung einer Parabel.

Originalgraph



$\boxed{\text{§3 Ausblick}}$

Algebra:

- weiteres Studium von Gruppen, Ringen, Körpern
- Lösbarkeit von Polynomgleichungen

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

Gibt es Formeln für Lösungen (so wie für $n=2$)?

$\rightsquigarrow$ Galoistheorie.

Algebraische Geometrie:

Betrachte allgemeine Lösungsmengen

$X \subseteq K^n$ gegeben durch Polynome in mehreren Variablen.

z. B. $X = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; x^n + y^n = z^n \right\}$

für $n \geq 2$ fest

"Fermat-Problem".

<u>Fermat's Letztes Problem</u> (bewiesen von A. Wiles 1993)

Für $n \geq 3$ gibt es keine Lösung $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in X$ mit $xyz \neq 0$.

Für $n=2$ gibt es unendlich viele Lösungen, die Pythagoras-Tupel z. B. $x=3$, $y=4$, $z=5$.