Kapitel 7: Allgemeine Theorie der Vektorräume und linearen Abbildungen. (4 Doppelstunden)

K beliebiger Körper, V beliebiger Vektorraum über K.

- meist keine Voraussetzung an dim V
- "kanonische" Konstruktionen (d.h., keine Wahlen von Basen erforderlich).

§1 Affine Unterräume und Faktorräume

Erinnerung Kap 0, §4: Sei $m \in \mathbb{N}$ fest

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ definiere $a \sim_m b$, wenn $m \mid b-a$

oder: $a \equiv b \mod m$.

Äquivalenzrelation

$$\mathbb{Z}/_m\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\} \text{ Äquivalenzklassen}$$

neue algebraische Struktur.

<u>Bem. 1.1</u> Sei V K-Vektorraum und $U \leq V$ Teilraum. Für $v, w \in V$ definiere

$$v \sim w \quad \text{falls} \quad v - w \in U.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation.

<u>reflexiv</u>: $0 = v - v \in U$, also $v \sim v$

<u>symmetrisch</u>: $v \sim w \Rightarrow v - w \in U$

$\Rightarrow w - v = -(v - w) \in U \Rightarrow w \sim v$

<u>transitiv</u>: $u \sim v$ und $v \sim w$

$\Rightarrow u - v \in U$ und $v - w \in U$

$\Rightarrow u - w = (u - v) + (v - w) \in U$, also $u \sim w$.

Äquivalenzklasse von v:

$$K_v := \{ w \in V \mid v \sim w \} = \{ w \in V \mid u := v - w \in U \}$$
$$= \{ w \in V \mid w = v - u \text{ für ein } u \in U \}$$
$$= \{ w \in V \mid w = v + u \text{ für ein } u \in U \}$$
$$=: v + U \quad \text{(Schreibweise)}.$$

oder auch einfach abgekürzt $\bar{v}$

Für $v, w \in V$ gilt $v + U = w + U \Leftrightarrow v - w \in U$.

<u>Denn</u>: "$\Rightarrow$" $v + U = w + U \Rightarrow w = v + u$ mit $u \in U$
$\Rightarrow v \sim w$.

"$\Leftarrow$" $u := v - w \in U \Rightarrow v = w + u$
$\Rightarrow v \in w + U$ und genauso $w \in v + U$.
d.h. $v \sim w$ und damit $v + U = w + U$.

<u>Definition 1.2</u> Für $v \in V$ heißt $\bar{v} := v + U$ Nebenklasse von v nach U oder auch affiner Unterraum von V.

<u>Beispiel 1.3</u> Sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$

$L := \{ x \in K^n \mid Ax = b \}$ Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems mit erweiterter Matrix $[A \mid b]$. Sei $L \neq \emptyset$ und $x_0 \in L$ eine feste Lösung. Dann

$$L = x_0 + U \quad \text{wobei } U = N(A) = \{ x \in K^n \mid Ax = 0 \}$$

affiner Teilraum

(Lösungsraum des homogenen Systems). (Kap 3, §1).

Satz 1.4 Sei $U \leq V$ Teilraum und

V/U = Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$ (wie oben)

$= \{\bar{v} := v + U \mid v \in V\}$.

(a) Dann ist auch V/U ein K-Vektorraum mit Verknüpfungen $\bar{v} + \bar{w} := \overline{v+w}$

$s \cdot \bar{v} := \overline{sv}$

für $v, w \in V$, $s \in K$.

Neutrales Element ist $\bar{0} = 0 + U = U$

Inverses $-\bar{v} = \overline{-v}$

V/U heißt Faktorraum oder Quotientenraum nach U.

b) Die Abbildung $\pi_U : V \to V/U$, $v \mapsto \bar{v}$, ist linear, surjektiv und es gilt $\operatorname{Kern}(\pi_U) = U$.

π_U heißt kanonischer Homomorphismus.

__Beweis:__ (a) Wie im Fall der mod-Relation auf $\mathbb{Z}$ müssen wir zeigen, daß Verknüpfungen "wohl-definiert" sind, d.h. korrekt

Seien $v, v', w, w' \in V$ mit $\bar{v} = \bar{v'}$ und $\bar{w} = \bar{w'}$

Dann gilt auch $\overline{v+w} = \overline{v'+w'}$ und $\overline{sv} = \overline{sv'}$ $(s \in K)$

1) $\bar{v} = \bar{v'}$ und $\bar{w} = \bar{w'} \Rightarrow v - v' \in U$ und $w - w' \in U$

$\Rightarrow (v+w) - (v'+w') = (v-v') + (w-w') \in U$

also $\overline{v+w} = \overline{v'+w'}$

2) Für $s \in K$ ist $sv - sv' = s(v-v') \in U$

also $\overline{sv} = \overline{sv'}$

Vektorraumaxiome ($(V/U, +)$ abelsche Gruppe etc.) ergeben sich unmittelbar aus Vektorraumaxiomen für V (siehe analog Beweis von Kap. 0, Satz 7.7).

b) $\pi_U(v+w) = \overline{v+w} = \bar{v} + \bar{w} = \pi_U(v) + \pi_U(w)$

$\pi_U(sv) = \overline{sv} = s\bar{v} = s\pi_U(v)$

also π_U linear, surjektiv klar

$\mathrm{Kern}(\pi_U) = \{v \in V \mid \bar{v} = \bar{0}\} = \{v \in V \mid v \in U\} = U$. □

<u>Satz 1.5</u> Sei $\dim V < \infty$. Dann gilt

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

<u>Beweis:</u> Betrachte lineare Abbildung $\pi_U : V \to V/U$.

$$\dim V = \dim \underbrace{\mathrm{Kern}(\pi_U)}_{=U} + \dim \underbrace{\mathrm{Bild}(\pi_U)}_{=V/U}$$

nach Satz 1.4. □

(!) Ist $d = \dim U$ und $B' = \{v_1, \dots, v_d\}$ Basis von U, ergänze zu Basis $B = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n\}$ von V ($n = \dim V$), so ist $\{\bar{v}_{d+1}, \dots, \bar{v}_n\}$ Basis von V/U.

<u>Satz 1.6</u> (Homomorphiesatz) Seien V, W K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ lineare Abbildung. Sei $U = \mathrm{Kern}(\varphi) \leq V$.
Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{\varphi} : V/U \to W$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi_U$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_U"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \\ V/U \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi}$ ist injektiv und

$\mathrm{Bild}(\bar{\varphi}) = \mathrm{Bild}(\varphi)$

$\bar{\varphi} : V/U \to \mathrm{Bild}(\varphi)$ Isomorphismus

also $\boxed{V/\mathrm{Kern}(\varphi) \cong \mathrm{Bild}(\varphi)}$

Beweis: Versuche $\overline{\varphi}: V/U \to W$ wie folgt zu definieren $\overline{\varphi}(\overline{v}) := \varphi(v)$ für $v \in V$.

Müssen zeigen, daß dies wohldefiniert ist.

Seien also $v, w \in V$ mit $\overline{v} = \overline{w}$

zu zeigen $\varphi(v) = \varphi(w)$ (dann $\overline{\varphi}(\overline{v}) = \overline{\varphi}(\overline{w})$ ✓).

Dazu: $\overline{v} = \overline{w} \Rightarrow v - w \in U = \mathrm{Kern}(\varphi)$

$\Rightarrow \varphi(v) - \varphi(w) = \varphi(v-w) = 0 \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(w)$ ✓.

$\overline{\varphi}$ linear: $\overline{\varphi}(\overline{v} + \overline{w}) = \overline{\varphi}(\overline{v+w}) = \varphi(v+w)$

$= \varphi(v) + \varphi(w) = \overline{\varphi}(\overline{v}) + \overline{\varphi}(\overline{w})$. genauso $\overline{\varphi}(s\overline{v})$

$= s\,\overline{\varphi}(\overline{v})$.

$\mathrm{Bild}(\overline{\varphi}) = \{\overline{\varphi}(\overline{v}) \mid v \in V\} = \{\varphi(v) \mid v \in V\} = \mathrm{Bild}(\varphi)$.

$\mathrm{Kern}(\overline{\varphi}) = \{\overline{v} \in V/U \mid \overline{\varphi}(\overline{v}) = 0\}$

$= \{\overline{v} \in V/U \mid \varphi(v) = 0\} = \{\overline{v} \in V/U \mid v \in \mathrm{Kern}(\varphi) = U\}$.

$= \{\overline{0}\}$ also $\overline{\varphi}$ injektiv.

Nach Konstruktion ist $(\overline{\varphi} \circ \pi_U)(v) = \overline{\varphi}(\overline{v}) = \varphi(v)$

für alle $v \in V$, also $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi_U$.

Sei schließlich $\psi: V/U \to W$ bel. mit $\psi \circ \pi_U = \varphi$.

Dann $\psi(\overline{v}) = \psi(\pi_U(v)) = (\psi \circ \pi_U)(v) = \varphi(v)$

für alle $v \in V$, also $\psi = \overline{\varphi}$. □

Beisp. 1.7 $V := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a_n)$ Cauchy-Folge mit $a_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$.

$\mathbb{Q}$-Vektorraum $\dim V = \infty$.

Analysis 1: Jede Cauchy-Folge hat Grenzwert in $\mathbb{R}$ und jede reelle Zahl ist Grenzwert einer

Cauchy-Folge in V $\rightsquigarrow$

Abbildung $\varphi: V \to \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

$\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ($\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum wegen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$)

$\mathrm{Kern}(\varphi) = \{ (a_n) \in V \mid \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0 \}$ Null-Folgen.

Homomorphiesatz: $V/_{\mathrm{Kern}(\varphi)} \cong \mathrm{Bild}(\varphi) = \mathbb{R}$.

Umgekehrt: Ist $\mathbb{R}$ noch nicht bekannt, so definiert man $\mathbb{R}$ als $V/_{\{\text{Nullfolgen}\}}$

<u>Bem. 1.8</u> $V/_U$ ist Beispiel für allgemeines Konstruktionsprinzip in der Algebra.

A algebraische Struktur, $\sim$ geeignete Äquivalenzrelation $\rightsquigarrow$ $A/_\sim$ Äquivalenzklassen bilden wieder algebraische Struktur

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $V/_U$, ...

$\boxed{\text{§2 Der Dualraum}}$

Seien V, W K-Vektorraum

$\mathrm{Hom}(V,W) = \{ \varphi: V \to W \mid \varphi \text{ linear} \}$ ist selbst wieder ein K-Vektorraum, siehe Kap. 3, §2.

Betrachte Spezialfall $W = K$.

<u>Def. 2.1</u> Der K-Vektorraum $V^* := \mathrm{Hom}(V,K)$ heißt "Dualraum" von V. Die Elemente von V^* sind lineare Abbildungen $\lambda: V \to K$ auch genannt "Linearformen".

Beisp 2.2 (a) Sei $V = K^n$, $a_1, \ldots, a_n \in K$ fest vorgegeben. Dann ist $\lambda : V \to K$ definiert durch

$$\lambda\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$$

eine Linearform.

(b) Sei $V = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$. Dann ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (Teilraum von $\mathrm{Abb}([a,b], \mathbb{R})$) und die Abbildung

$$\lambda : V \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$$

ist eine Linearform (nach Sätzen der Analysis).

(c) Sei $X \neq \emptyset$ Menge und $V = \mathrm{Abb}(X, K)$ K-Vektorraum. Sei $x_0 \in X$ fest. Dann ist

$$\lambda_{x_0} : V \to K, \quad f \mapsto f(x_0)$$

eine Linearform "Auswertung an x_0".

Seien $x_1, \ldots, x_n \in X$ paarweise verschieden, $\lambda_i := \lambda_{x_i} : V \to K$ wie oben definiert. Dann sind $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ l.u. in V^*.

Dazu: Seien $s_1, \ldots, s_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n s_i \lambda_i = 0$.

Dann $0 = \sum_{i=1}^n s_i \lambda_i(f) = \sum_{i=1}^n s_i \cdot f(x_i)$ für alle $f \in V$.

Für $1 \le j \le n$ definiere $f_j \in V$ durch

$$f_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = x_j \\ 0 & \text{falls } x \neq x_j. \end{cases}$$

Dann $f_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$

also $0 = \sum_{i=1}^n s_i \underbrace{f_j(x_i)}_{=0 \text{ für } i \neq j} = s_j \cdot 1$ für $1 \le j \le n$.

✓.

(d) Sei $V = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a_n)$ konvergente Folge mit $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N} \}$.
Vektorraum, Teilraum von $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
Die Abbildung $\lambda : V \to \mathbb{R}$, $(a_n) \mapsto \lim_{n \to \infty} (a_n)$
ist eine Linearform.

__Satz 2.3__ Sei $n = \dim V < \infty$ und $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$
Basis von V. Dann gibt es zu jedem v_i genau
ein $\lambda_i \in V^*$ mit $\lambda_i(v_i) = 1$ und $\lambda_i(v_j) = 0$ für $i \neq j$.
Dann ist $B^* := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$
eine Basis von V^* und heißt die zu B duale
Basis. Insbesondere $\dim V = \dim V^*$.
Auch Schreibweise $v_i^* := \lambda_i$ für $1 \leq i \leq n$.
Für $v \in V$ beliebig gilt dann:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i^*(v)\, v_i$$

Für $\lambda \in V^*$ beliebig gilt dann

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda(v_i)\, v_i^*$$

__Beweis__: Existenz und Eindeutigkeit von λ_i klar
(siehe Kap. 3, Lemma 2.3). Nach Kap. 3, Satz 2.9
gilt auch $\dim V^* = \dim Hom(V, K) = (\dim V)\underbrace{(\dim K)}_{=1}$
$= \dim V$
Müssen also noch zeigen $V = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle_K$.
Dazu sei $\lambda \in V$ beliebig. Dann ist

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda(v_i)\lambda_i\right)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(v_i) \underbrace{\lambda_i(v_j)}_{=0 \text{ für } i \neq j} = \lambda(v_j)$$

für $1 \leq j \leq n$.

also $\sum_{i=1}^{n} \lambda(v_i)\lambda_i = \lambda$ ✓ Außerdem Formel
für Zerlegung von λ in dualer Basis gezeigt.

Schließlich sei $v \in V$ beliebig $v = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i$ mit $s_i \in K$. Dann

$$\lambda_j(v) = \sum_{i=1}^{n} s_i \underbrace{\lambda_j(v_i)}_{=0 \text{ für } i \neq j} = s_j \quad \text{für } 1 \leq j \leq n$$

also auch Formel für Zerlegung von v in Basis B gezeigt. □

Bemerkung 2.4 Satz 2.3 gilt nicht für unendlich-dimensionale Vektorräume Beispiel:

$V = P(\mathbb{Q})$ = alle Polynomfunktionen $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

Basis $B = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ mit $p_i(x) = x^i$ für $x \in \mathbb{Q}$.

Definiere wie oben $\lambda_i \in V^*$ durch

$$\lambda_i(p_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Dann ist $\langle \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \rangle_{\mathbb{Q}} \subsetneq V^*$

denn wäre "=" so betrachte $\lambda \in V^*$ def. durch

$\lambda(f) = f(1)$ (Auswertung an 1).

Wäre $\lambda = \sum_{i=0}^{n} s_i \lambda_i$ mit $s_i \in \mathbb{Q}$, so

$$1 = \lambda(p_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} s_i \underbrace{\lambda_i(p_{n+1})}_{=0} = 0$$

Widerspruch.

Satz 2.5 Sei V K-Vektorraum und

$V^{**} := (V^*)^*$ "Bidualraum" von V.

(a) Zu jedem $v \in V$ ist $\tilde{v}: V^* \to K, \lambda \mapsto \lambda(v)$ eine lineare Abbildung und $\tilde{v} \in V^{**}$.

(b) Die Abbildung $\varphi: V \to V^{**}$, $v \mapsto \tilde{v}$ ist linear

(c) Ist $\dim V < \infty$, so ist $\varphi: V \to V^{**}$ ein Isomorphismus [beachte: φ "kanonisch", unabhängig von der Wahl irgendeiner Basis].

<u>Beweis</u>: (a) $\tilde{v}$ ist Auswertung an v
$V^* \subseteq \mathrm{Abb}(V, K)$ Teilraum Beisp. 2.2.
also $\tilde{v} \in V^{**}$.

(b) φ ist linear, denn für $v, w \in V$ und $\lambda \in V^*$ gilt:
$$\varphi(v+w)(\lambda) = \widetilde{v+w}(\lambda) = \lambda(v+w) = \lambda(v) + \lambda(w)$$
$$= \tilde{v}(\lambda) + \tilde{w}(\lambda) = (\tilde{v} + \tilde{w})(\lambda) = (\varphi(v) + \varphi(w))(\lambda).$$

Genauso $\varphi(s w)(\lambda) = (s\varphi(w))(\lambda)$.

(c) Sei nun $\dim V < \infty$. <u>Beh</u>: φ injektiv
Sei $0 \neq v \in V$ zu zeigen: $\tilde{v} = \varphi(v) \neq 0$.
<u>Dazu</u>: Nach Basisergänzungssatz gibt es Basis
$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V mit $v_1 = v$
$(n = \dim V)$

Def. $\lambda: V \to K$ linear mit $\lambda(v_1) = 1$
und $\lambda(v_i) = 0$ für $i > 1$.

Dann $\varphi(v)(\lambda) = \tilde{v}(\lambda) = \lambda(v) = \lambda(v_1) = 1 \neq 0$
also $\varphi(v) \neq 0$. ✓.
Da φ injektiv, folgt $\dim V \leq \dim V^{**}$
Andererseits $\dim V^{**} = \dim (V^*)^* = \dim V^* = \dim V$
also φ auch surjektiv

<u>Folgerung 2.6</u> Sei $\dim V = n < \infty$ und
$C = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ Basis von V^*. Dann gibt es
Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V mit $v_i^* = \lambda_i$
für $1 \leq i \leq n$.

<u>Beweis</u>: Sei $C^* = \{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*\}$ zu C duale
Basis von $V^{**} = (V^*)^*$, d.h. $\lambda_i^*(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$

Satz 2.5: $\lambda_i^* = \tilde{v}_i$ für $v_i \in V$
$\overset{\shortparallel}{\varphi(v_i)}$

Weil φ Isomorphismus ist, ist $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V.

$\lambda_j(v_i) = \tilde{v}_i(\lambda_j) = \lambda_i^*(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

also $\lambda_j = v_j^*$ für $1 \leq j \leq n$. $\square$

<u>Beisp. 2.7</u> Sei $n \geq 1$ und $V = K[X]_{<n}$

$= \{ a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} \mid a_i \in K \} \subseteq K[X]$ Teilraum

$= \langle 1, X, X^2, \dots, X^{n-1} \rangle_K$

Sei $|K| \geq n$ und $y_1, \dots, y_n \in K$ paarweise verschieden. Dann definiere $\lambda_j : V \to K$, $f \mapsto f(y_j)$

Auswertung an y_j:

$\Rightarrow$ λ_j linear also $\lambda_j \in V^*$.

<u>Beh.</u>: $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ l.u. in V^*.

Dazu seien $s_0, \dots, s_{n-1} \in K$ mit $\sum_{i=0}^{n-1} s_i \lambda_i = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} s_i \lambda_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i f(y_i) = 0$ für alle $f \in V$.

Betrachte $f = X^j$ für $0 \leq j \leq n-1$: $\sum_{i=0}^{n-1} s_i y_j^i = 0$ für $0 \leq j \leq n-1$.

Vandermonde-Matrix invertierbar Kap. 2, Beisp. 3.6.

also $s_i = 0$ für alle i.

$\dim V^* = \dim V = n \Rightarrow \{\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}\}$ Basis von V^*.

Nach Folgerung 2.6 gibt es also Basis $\{f_0, \dots, f_{n-1}\}$ von V mit $f_i^* = \lambda_i$.

Es muß also gelten $\lambda_j(f_i) = f_i(y_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$

Damit $$f_i = \prod_{\substack{0 \le j \le n-1 \\ j \ne i}} \frac{X - y_j}{y_i - y_j} \in K[X]_{<n}$$

Lagrange-Interpolationspolynome. Für $f \in K[X]_{<n}$ gilt dann $$f = \sum_{i=0}^{n-1} f(y_i)\, f_i$$

<u>Def. 2.8</u> Seien V, W K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ lineare Abbildung. Dann definiere

$$\varphi^*: W^* \to V^*, \quad \mu \mapsto \mu \circ \varphi$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\varphi^*(\mu)"'] & W \arrow[d, "\mu"] \\ & K \end{tikzcd}$$

(Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen ist linear also $\mu \circ \varphi \in V^*$)

φ^* heißt die zu φ transponierte Abbildung.

Beachte: φ^* linear, denn

$$\varphi^*(\mu + \mu')(v) = ((\mu + \mu') \circ \varphi)(v) = (\mu + \mu')(\varphi(v))$$
$$= \mu(\varphi(v)) + \mu'(\varphi(v)) = (\mu \circ \varphi)(v) + (\mu' \circ \varphi)(v)$$
$$= \varphi^*(\mu)(v) + \varphi^*(\mu')(v) = (\varphi^*(\mu) + \varphi^*(\mu'))(v)$$

für alle $v \in V$, also $\varphi^*(\mu + \mu') = \varphi^*(\mu) + \varphi^*(\mu')$

Genauso $\varphi^*(s\mu) = s\varphi^*(\mu)$ für $s \in K$.

<u>Satz 2.9</u> Sei $n = \dim V < \infty$ und $m = \dim W < \infty$. $\varphi: V \to W$ linear, B Basis von V, C Basis von W. $A = M^B_C(\varphi) \in K^{m \times n}$ Matrix von φ bzgl. B, C

$$\Longrightarrow \quad M^{C^*}_{B^*}(\varphi^*) = A^{tr}$$

wobei C^* zu C duale Basis von W^* und B^* zu B duale Basis von V^*.

Beweis: Sei $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ und $C=\{w_1,\dots,w_m\}$.

$A=[a_{ij}]$ mit $\varphi(v_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i$.

$B^*=\{v_1^*,\dots,v_n^*\}$ und $C^*=\{w_1^*,\dots,w_m^*\}$.

$$\varphi^*(w_l^*)(v_j)=(w_l^*\circ\varphi)(v_j)=w_l^*(\varphi(v_j))$$

$$=w_l^*\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i\Big)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,\underbrace{w_l^*(w_i)}_{=\begin{cases}1 & l=i\\ 0 & l\neq i\end{cases}}=a_{lj}$$

Andererseits:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, v_k^*\Big)(v_j)=\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\,\underbrace{v_k^*(v_j)}_{=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}}=a_{lj}$$

Also $\varphi^*(w_l^*)=\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, v_k^*$ d.h. $M^{C^*}_{B^*}(\varphi^*)=A^{tr}$. □

Wollen nun Zusammenhang zwischen Kern, Bild von φ und φ^* klären. Dazu benötigen wir:

Def. 2.10 Sei V K-Vektorraum und $M\subseteq V$ Teilmenge. Dann heißt

$$M^0:=\{\lambda\in V^*\mid \lambda(m)=0 \text{ für alle } m\in M\}$$

der Annulator von M.

Man sieht sofort: M^0 Teilraum von V^*.

Satz 2.11 Sei $\varphi: V\to W$ linear. Dann ist

$$\operatorname{Kern}(\varphi^*)=\operatorname{Bild}(\varphi)^0 \quad (\subseteq W^*)$$

und $\operatorname{Bild}(\varphi^*)\subseteq\operatorname{Kern}(\varphi)^0 \quad (\subseteq V^*)$

Beweis: Zuerst $\operatorname{Kern}(\varphi^*)\subseteq\operatorname{Bild}(\varphi)^0$.

Dazu sei $\mu \in \mathrm{Kern}(\varphi^*)$, also $0 = \varphi^*(\mu) = \mu \circ \varphi$

d.h. $\mu(\varphi(v)) = (\mu\circ\varphi)(v) = 0$ für alle $v \in V$

und damit $\mu \in \mathrm{Bild}(\varphi)^0$.

Umgekehrt sei $\mu \in \mathrm{Bild}(\varphi)^0$. Dann $\mu(\varphi(v)) = 0$

für alle $v \in V$ also $\varphi^*(\mu) = 0$, d.h. $\mu \in \mathrm{Kern}(\varphi^*)$.

Nun $\mathrm{Bild}(\varphi^*) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)^0$. Dazu sei

$\mu \in \mathrm{Bild}(\varphi^*)$ also $\lambda = \varphi^*(\mu)$ für ein $\mu \in W^*$.

Sei $v \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Dann $\lambda(v) = \varphi^*(\mu)(v) = (\mu\circ\varphi)(v)$

$= \mu(\underbrace{\varphi(v)}_{=0}) = 0$ also $\lambda \in \mathrm{Kern}(\varphi)^0$. $\square$

<u>Satz 2.12</u> Sei V K-Vektorraum und $U \leq V$ Teilraum. Ist $\dim V < \infty$, so gilt

$$\dim U^0 = \dim V - \dim U.$$

<u>Beweis</u>: Betrachte die lineare Abbildung

$\varphi: U \to V$, $u \mapsto u$, offenbar injektiv.

Dann ist $\varphi^*: V^* \to U^*$

$\lambda \mapsto \lambda\circ\varphi = \lambda|_U$ (Einschränkung).

Sei $d = \dim U$ und $B' = \{v_1, \ldots, v_d\}$ Basis von U

Ergänze zu Basis $B = \{v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_n\}$ ~~Basis~~

von V ($n = \dim V$). Sei nun $\mu \in U^*$

Dann def. $\hat{\mu}: V \to K$ durch $\hat{\mu}(v_i) = \begin{cases} \mu(v_i) & \text{für } i \leq d \\ 0 & \text{für } i > d. \end{cases}$

also $\hat{\mu} \in V^*$ und $\hat{\mu}|_U = \mu$.

d.h. φ^* ist surjektiv

Ausserdem: $\mathrm{Kern}(\varphi^*) = U^0$

denn: $\lambda \in \mathrm{Kern}(\varphi^*) \Rightarrow \lambda|_U = 0 \Rightarrow \lambda(u) = 0$

für alle $u \in U$ $\Rightarrow$ $\lambda \in U^0$.

Umgekehrt: $\lambda \in U^0 \Rightarrow \lambda(u) = 0$ für alle $u \in U$

d.h. $\lambda|_U = 0$ also $\lambda \in \mathrm{Kern}(\varphi^*)$.

Damit nun:

$$\dim V = \dim V^* = \dim \underbrace{\mathrm{Kern}(\varphi^*)}_{= U^0} + \dim \underbrace{\mathrm{Bild}(\varphi^*)}_{= U} \quad \square.$$

<u>Folgerung 2.13</u> Seien $\dim V < \infty$ und $\dim W < \infty$. $\varphi: V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\mathrm{Bild}(\varphi^*) = \mathrm{Kern}(\varphi)^0$$

Ausserdem: φ surjektiv $\Leftrightarrow$ φ^* injektiv

φ injektiv $\Leftrightarrow$ φ^* surjektiv.

<u>Beweis</u>: Nach Satz 2.11 wissen wir bereits $\mathrm{Bild}(\varphi^*) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)^0$. Müssen also noch zeigen:

$$\dim \mathrm{Bild}(\varphi^*) = \dim \mathrm{Kern}(\varphi)^0.$$

<u>Dazu</u>: $\dim \mathrm{Bild}(\varphi^*) = \dim W^* - \dim \mathrm{Kern}(\varphi^*)$

$$\underset{\text{Satz 2.11}}{=} \dim W - \dim \mathrm{Bild}(\varphi)^0 \underset{\text{Satz 2.12}}{=} \dim W - (\dim W - \dim \mathrm{Bild}(\varphi))$$

$$= \dim \mathrm{Bild}(\varphi) = \dim V - \dim \mathrm{Kern}(\varphi)$$

$$\underset{\text{Satz 2.12}}{=} \dim \mathrm{Kern}(\varphi)^0.$$

Nun zu den "Äquivalenzen":

φ surjektiv $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Bild}(\varphi) = \dim W$

$\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Bild}(\varphi)^0 = 0$

$\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Kern}(\varphi^*) = 0 \Leftrightarrow \varphi^*$ injektiv.

φ injektiv $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Kern}(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Kern}(\varphi)^0 = \dim V^*$

$\Leftrightarrow \dim \mathrm{Bild}(\varphi^*) = \dim V^* \Leftrightarrow \varphi^*$ surjektiv. $\square$.

(!) $U \leq V$ Teilraum $\Rightarrow (V/U)^* \cong U^0$

§3 Multilineare Abbildungen und Tensorprodukt

Sei K Körper. Seien $V_1, \dots, V_d$ und W Vektorräume über K. Eine Abbildung

$$\varphi : V_1 \times \dots \times V_d \to W$$

heißt multilinear, wenn φ linear in jedem Argument ist, d.h. für $1 \leq i \leq d$, $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_d \in V$, $v, v' \in V$ und $s, t \in K$ gilt

$$\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Position } i}}{sv + tv'}, v_{i+1}, \dots, v_d)$$

$$= s\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_d) + t\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_d)$$

Spezialfall $d = 2$, $V_1 = V_2$, $W = K$

$\rightsquigarrow$ Bilinearformen.

Sei $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_d; W) = \{ \varphi : V_1 \times \dots \times V_d \to W \mid \varphi \text{ multilinear} \}$.

Dies ist selbst wieder ein K-Vektorraum

$\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_d; W)$

$(\varphi + \varphi')(v_1, \dots, v_d) = \varphi(v_1, \dots, v_d) + \varphi'(v_1, \dots, v_d)$

$(s\varphi)(v_1, \dots, v_d) = s\varphi(v_1, \dots, v_d)$ für $s \in K$.

Beispiel 3.1 a) $d = n$, $V_1 = \dots = V_n = K^n$, $W = K$.

$v_j \in V_j$ $\quad v_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \in K^n$

Sei $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$

$\Delta(v_1, \dots, v_n) := \det(A)$ Dann ist

$\Delta : K^n \times \dots \times K^n \to K$ multilinear

siehe Kap. 4, §2.

b) $d=2$ $\quad V_1 = V_2 = K[X]$

$$\beta : K[X] \times K[X] \to K[X]$$
$$(f, g) \mapsto f \cdot g \quad \text{(Produkt von Polynomen)}$$

ist bilinear.

<u>Def. 3.2</u> (T. Gowers, Fields Medal 1998)

siehe https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/tensors3.html

"How to loose your fear of tensor products"

Seien $V_1, \dots, V_d$ Vektorräume über K.

Für gegebene Vektoren $v_1 \in V_1, \dots, v_d \in V_d$ definiere eine Linearform

$$\lambda_{(v_1, \dots, v_d)} : \mathcal{L}(V_1, \dots, V_d; K) \to K$$
$$\varphi \mapsto \varphi(v_1, \dots, v_d).$$

Der Teilraum

$$\langle \lambda_{(v_1, \dots, v_d)} \mid v_i \in V_i \text{ für } 1 \le i \le d \rangle_K \le \mathcal{L}(V_1, \dots, V_d; K)^*$$

heißt Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_d$ und wird mit $V_1 \otimes \dots \otimes V_d$ bezeichnet.

Ebenfalls Kurzschreibweise $\lambda_{(v_1, \dots, v_d)} = v_1 \otimes \dots \otimes v_d$.

Also $V_1 \otimes \dots \otimes V_d = \langle v_1 \otimes \dots \otimes v_d \mid v_i \in V_i \text{ für } 1 \le i \le d \rangle_K \subseteq \mathcal{L}(V_1, \dots, V_d; K)^*$

<u>Bemerkung 3.3</u> Die Abbildung

$$\tau : V_1 \times \dots \times V_d \to V_1 \otimes \dots \otimes V_d$$
$$(v_1, \dots, v_d) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_d$$

ist multilinear.

<u>denn</u>: $\tau(v_1, \dots, v_{i-1}, sv + tv', v_{i+1}, \dots, v_d)(\varphi)$

$= \lambda_{(v_1,\dots,v_{i-1},sv+tv',v_{i+1},\dots,v_d)}(\varphi)$

$= \varphi(v_1,\dots,v_{i-1},sv+tv',v_{i+1},\dots,v_d)$

$\underset{\uparrow}{=} s\,\varphi(v_1,\dots,v_{i-1},v,v_{i+1},\dots,v_d) + t\,\varphi(v_1,\dots,v_{i-1},v',v_{i+1},\dots,v_d)$

φ multi-linear

$= \dots = s\,\tau(v_1,\dots,v_{i-1},v,v_{i+1},\dots,v_d)$

$\qquad + t\,\tau(v_1,\dots,v_{i-1},v',v_{i+1},\dots,v_d)$.

<u>Satz 3.4</u> (Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts)
Sei W beliebiger Vektorraum über K und $\varphi: V_1\times\dots\times V_d \to W$ beliebige multilineare Abbildung. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung
$$\tilde{\varphi}: V_1\otimes\dots\otimes V_d \to W \text{ mit } \varphi = \tilde{\varphi}\circ\tau$$

$$\begin{tikzcd}
V_1\times\dots\times V_d \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\tau"'] & W \\
 & V_1\otimes\dots\otimes V_d \arrow[u, dashed, "\tilde{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u>: Eindeutigkeit: Sei auch $\tilde{\varphi}': V_1\otimes\dots\otimes V_d \to W$ linear mit $\varphi = \tilde{\varphi}\circ\tau = \tilde{\varphi}'\circ\tau$.
Dann $\tilde{\varphi}'(v_1\otimes\dots\otimes v_d) = \tilde{\varphi}'(\tau(v_1,\dots,v_d)) = \varphi(v_1,\dots,v_d)$.
Weil $V_1\otimes\dots\otimes V_d$ von den Vektoren $v_1\otimes\dots\otimes v_d$ erzeugt wird, ist also $\tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi}$ eindeutig durch φ bestimmt. Nun zur Existenz von $\tilde{\varphi}$.

Zuerst behandeln wir den Spezialfall $W = K$. Dann ist $\varphi \in \mathcal{L}(V_1,\dots,V_d;K)$ und wir erhalten eine lineare Abbildung
$$\hat{\varphi}: \mathcal{L}(V_1,\dots,V_d;K)^* \to K,\quad \mu \mapsto \mu(\varphi).$$

Sei $\hat{\varphi} :=$ Einschränkung von $\tilde{\varphi}$ auf Teilraum $V_1 \otimes \ldots \otimes V_d \subseteq \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_d; K)^*$.

Dann $(\hat{\varphi} \circ \tau)(v_1, \ldots, v_d) = \hat{\varphi}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_d)$
$= \tilde{\varphi}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_d) = (v_1 \otimes \ldots \otimes v_d)(\varphi) = \varphi(v_1, \ldots, v_d)$
also $\hat{\varphi} \circ \tau = \varphi$ wie gewünscht. Sei nun W beliebig. Wähle Basis B von W (Ist dim $W = \infty$, so benötigen wir dazu das Auswahlaxiom, siehe Kap. 2). Jedes $w \in W$ hat eindeutige Darstellung
$$w = \sum_{b \in B} s_{w,b} \cdot b$$
wobei $s_{w,b} \in K$ und nur endlich viele dieser Koeffizienten $\neq 0$ sind.

Sei $b \in B$ fest. Dann ist die Abbildung
$\delta_b : W \to K,\ w \mapsto s_{w,b}$, linear und $\delta_b \circ \varphi \in \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_d; K)$. Wir wissen also bereits, daß es dann eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}_b : V_1 \otimes \ldots \otimes V_d \to K$ gibt mit $\delta_b \circ \varphi = \tilde{\varphi}_b \circ \tau$.

Nun def. $\tilde{\varphi} : V_1 \otimes \ldots \otimes V_d \to W$ durch
$$\tilde{\varphi}(x) := \sum_{b \in B} \tilde{\varphi}_b(x) \qquad (x \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_d).$$

Beachte: Die Summe ist endlich denn x ist endl. Linearkomb. von Termen $v_1 \otimes \ldots \otimes v_d$ mit $v_i \in V_i$; es gilt $\varphi(v_1, \ldots, v_d) \in W$ für jeden dieser Terme und es gibt nur endl. viele $b \in B$ mit
$$\tilde{\varphi}_b(v_1 \otimes \ldots \otimes v_d) = \delta_b(\varphi(v_1, \ldots, v_d)) \neq 0.$$

Dann prüft man sofort, daß $\tilde{\varphi}$ linear ist und es gilt

$$(\tilde{\varphi} \circ \tau)(v_1 \otimes \dots \otimes v_d) = \tilde{\varphi}(v_1 \otimes \dots \otimes v_d)$$

$$= \sum_{b \in B} \tilde{\varphi}_b (v_1 \otimes \dots \otimes v_d) = \sum_{b \in B} \delta_b (\varphi(v_1, \dots, v_d))$$

$$= \varphi(v_1, \dots, v_d) \text{ nach Def. von } \delta_b \qquad \square.$$

<u>Satz 3.5</u> Seien $V_1, \dots, V_d$ K-Vektorräume mit $\dim V_i < \infty$ für $1 \le i \le d$. Dann gilt

$$\dim (V_1 \otimes \dots \otimes V_d) = (\dim V_1) \cdots (\dim V_d) < \infty.$$

<u>Beweis</u>: Sei $B_i = \{ b_j^{(i)} \mid j \in I_i \}$ Basis von V_i wobei I_i Indexmenge mit $\dim V_i = |I_i|$.

<u>Beh.</u>: $B := \{ b_{j_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes b_{j_d}^{(d)} \mid b_{j_i}^{(i)} \in I_i \}$

Basis von $V_1 \otimes \dots \otimes V_d$ ($\Rightarrow$ Dimensionsformel).

<u>Dazu</u>: $V_1 \otimes \dots \otimes V_d = \langle v_1 \otimes \dots \otimes v_d \mid v_i \in V_i \rangle_K$.

Jedes v_i ist Linearkomb. von B_i.

$\tau : V_1 \times \dots \times V_d \to V_1 \otimes \dots \otimes V_d$ multilinear

(Bem. 3.3) $\Rightarrow$ $v_1 \otimes \dots \otimes v_d$ Linearkomb. von B.

Damit $V_1 \otimes \dots \otimes V_d = \langle B \rangle_K$.

Noch zu zeigen: B l. u.

Seien $s_{j_1, \dots, j_d} \in K$ gegeben mit

$$\sum_{j_1 \in I_1, \dots, j_d \in I_d} s_{j_1, \dots, j_d} \, b_{j_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes b_{j_d}^{(d)} = 0$$

Sei $B_i^* = \{ \hat{b}_j^{(i)} \mid j \in I_i \}$ die zu B_i duale Basis von V_i^*.

Dann def.

$$\lambda_{k_1,\dots,k_d} : V_1 \times \dots \times V_d \to K$$
$$(v_1,\dots,v_d) \mapsto \hat{b}^{(1)}_{k_1}(v_1) \cdot \ldots \cdot \hat{b}^{(d)}_{k_d}(v_d)$$

für $k_i \in I_i$. Man sieht sofort, $\lambda_{k_1,\dots,k_d} \in \mathcal{L}(V_1,\dots,V_d;K)$.

Also:

$$0 = \sum_{\dots} s_{j_1,\dots,j_d} \left(b^{(1)}_{j_1} \otimes \dots \otimes b^{(d)}_{j_d}\right)(\lambda_{k_1,\dots,k_d})$$
$$= \sum_{\dots} s_{j_1,\dots,j_d} \, \lambda_{k_1,\dots,k_d}\left(b^{(1)}_{j_1},\dots,b^{(d)}_{j_d}\right)$$
$$= \sum_{\dots} s_{j_1,\dots,j_d} \underbrace{\hat{b}^{(1)}_{k_1}\left(b^{(1)}_{j_1}\right)}_{=\begin{cases} 1 & k_1 = j_1 \\ 0 & k_1 \neq j_1 \end{cases}} \cdots \underbrace{\hat{b}^{(d)}_{k_d}\left(b^{(d)}_{j_d}\right)}_{=\begin{cases} 1 & k_d = j_d \\ 0 & k_d \neq j_d \end{cases}}$$
$$= s_{k_1,\dots,k_d}$$

Also alle Koeffizienten $= 0$. $\square$.

<u>Beispiel 3.6</u> Seien V, W K-Vektorräume mit $\dim V < \infty$ und $\dim W < \infty$. Betrachte

$$\varphi : V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V,W)$$

wie folgt definiert. Sei $\lambda \in V^*$, $w \in W$.

Dann def. $\varphi_{\lambda,w} : V \to W$ linear:
$$v \mapsto \lambda(v) \cdot w$$

Setze $\varphi(\lambda, w) := \varphi_{\lambda,w}$. Man rechnet sofort nach, daß φ bilinear ist. Nach universeller Eigenschaft gibt es also eine lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi} : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V,W).$$

<u>Beh.</u>: $\tilde{\varphi}$ ist ein Isomorphismus.

<u>Bew.</u>: Sei $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ Basis von V und

$C = \{w_1, \dots, w_m\}$ Basis von W, also $\dim V = n$
$\dim W = m$.

Dann $\Phi_{B,C} : \mathrm{Hom}(V,W) \to K^{m\times n}$ Isomorphismus
$\varphi \mapsto M_C^B(\varphi)$ (Kap. 3)

$K^{m\times n}$ hat Basis $\{E_{kl} \mid 1 \le k \le m, 1 \le l \le n\}$.

$$E_{kl} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} & \leftarrow k \\ \uparrow & \\ l & \end{array}$$

Entsprechende Basis von $\mathrm{Hom}(V,W)$ ist
$\{\psi_{kl} \mid 1 \le k \le m, 1 \le l \le n\}$

wobei $\psi_{kl} : V \to W$ mit $\psi_{kl}(v_j) = \begin{cases} w_k & \text{wenn } j = l \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Sei $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ duale Basis von V

betrachte $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

Dann $\varphi_{v_l^*, w_k}(v_j) = v_l^*(v_j)\, w_k = \begin{cases} w_k & \text{wenn } j = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

also $\varphi_{v_l^*, w_k} = \psi_{kl}$.
$\tilde{\varphi}(v_l^* \otimes w_k)$

Also enthält $\mathrm{Bild}(\tilde{\varphi})$ eine Basis von $\mathrm{Hom}(V,W)$, d.h. $\tilde{\varphi}$ surjektiv.

Andererseits $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$

und $\dim(V^* \otimes W) = \dim V^* \cdot \dim W$
$= \dim V \cdot \dim W$

also $\tilde{\varphi}$ Isomorphismus.

<u>Bemerkung 3.7</u> Sei V K-Vektorraum, $n = \dim V < \infty$, und $\varphi : V \to V$ linear.
Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V.

$A = M_B(\varphi) \in M_n(K)$ Matrix von φ bzgl. B.
$= [a_{ij}]$ also $\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$

Dann $\operatorname{Spur}(\varphi) := \operatorname{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
(Lemma 4.4)

Haben in Kap. 4 gesehen, daß Definition nicht von der Wahl der Basis B abhängt.

Frage: Gibt es direkte Definition von $\operatorname{Spur}(\varphi)$, ohne zuerst Basis zu wählen und Matrix A zu bilden? Antwort: JA, mit Hilfe von Tensorprodukten!

Betrachte Abbildung
$$\psi : V^* \times V \to K, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda(v)$$

Man sieht sofort, daß ψ bilinear ist, also gibt es lineare Abbildung $\tilde{\psi} : V^* \otimes V \to K$ mit $\tilde{\psi}(\lambda \otimes v) = \lambda(v)$ für alle $\lambda \in V^*$, $v \in V$.

Beisp. 3.6: Isomorphismus
$$V^* \otimes V \to \operatorname{Hom}(V,V) = \operatorname{End}(V).$$

Inverse dieses Isomorphismus
$$\operatorname{End}(V) \xrightarrow{\sim} V^* \otimes V \xrightarrow{\tilde{\psi}} K$$
$$\varphi \longmapsto \sigma(\varphi).$$

Zeige, daß $\sigma(\varphi) = \operatorname{Spur}(\varphi)$ gilt.

Es gibt auch eine solche "basiswahlfreie" Beschreibung von $\det(\varphi)$, siehe N. Bourbaki, Algèbre, chap. 3, § 8.

Beisp. 3.8 Seien V, W K-Vektorräume mit $n = \dim V < \infty$ und $m = \dim W < \infty$.

Seien $\varphi: V \to V$ und $\psi: W \to W$ linear.

Dann ist
$$V \times W \to V \otimes W$$
$$(v, w) \mapsto \varphi(v) \otimes \psi(w)$$
bilinear,

also gibt es nach universeller Eigenschaft eine lineare Abbildung
$$V \otimes W \to V \otimes W$$
$$v \otimes w \mapsto \varphi(v) \otimes \psi(w)$$

Diese wird mit $\varphi \otimes \psi$ bezeichnet und heißt Tensorprodukt von φ und ψ.

Sei $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V, $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ Basis von W. Dann ist $\{v_i \otimes w_j \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$ Basis von $V \otimes W$.

$A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ Matrix von φ bzgl. B_1

$B = (b_{ij}) \in M_m(K)$ Matrix von ψ bzgl. B_2.

Was ist Matrix von $\varphi \otimes \psi$?

Antwort: $A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix} \in M_{n \cdot m}(K)$.

"Kronecker-Produkt" von A und B

(!) $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \cdot \det(B)^n$

$\text{Rang}(A \otimes B) = \text{Rang}(A) \cdot \text{Rang}(B)$

$\text{Spur}(A \otimes B) = \text{Spur}(A) \cdot \text{Spur}(B)$.