Kapitel 6: Normalformen von Matrizen

K bel. Körper, V K-Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$. Sei $\varphi: V \to V$ lineare Abbildungen. Fragestellung:

Finde Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V, so daß $M_B(\varphi) \in M_n(K)$ (darstellende Matrix) möglichst einfache Gestalt hat.

Matrixversion: Ist $A \in M_n(K)$ gegeben, so finde invertierbare Matrix $T \in M_n(K)$, so daß $T^{-1}AT$ möglichst einfache Gestalt hat.

Was ist "möglichst einfache" Gestalt?

Idealfall: Diagonalmatrix $\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$ $d_i \in K$.

Aber: Es gibt Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind, z. B.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(K)$ $\quad \tilde{\mu}_A = (X-1)^2$ Minimalpolynom

also A nicht diagonalisierbar (Kap. 3, Satz 3.9 und Satz 5.6).

oder $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ $\quad \tilde{\mu}_A = \chi_A = X^2+1 \in \mathbb{R}[X]$

hat keine Nullstellen, also gar keine Eigenwerte.

Matrix "möglichst einfach": möglichst viele Einträge gleich 0.

§ 1 Zerfallende Endomorphismen

$\varphi: V \to V$ wie oben. Sei B Basis von V und $A = M_B(\varphi) \in M_n(K)$. Dann heißt

$\chi_\varphi := \det(A - XI_n) \in K[X]$ das charakteristische Polynom von A (hängt nicht ab von der Wahl der Basis nach Lemma 4.4)

Analog: $\tilde{\mu}_\varphi := \tilde{\mu}_A$ heißt Minimalpolynom von φ. (hängt nicht ab von der Wahl der Basis nach LAAG1, Blatt 15, Aufgabe 1).

Def. 1.1 Die lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ heißt zerfallend, wenn $\chi_\varphi \in K[X]$ ein zerfallendes Polynom ist.

Erinnerung Kap 3, Def. 5.3: Sei $0 \neq f \in K[X]$. Gibt es $c_1, .., c_n \in K$ und ein $0 \neq c \in K$ mit $f = c(X - c_1) \cdots (X - c_n)$, so heißt f zerfallend. Sind alle c_i paarweise verschieden, so heißt f einfach-zerfallend.

Sei $0 \neq f \in K[X]$ zerfallend. Fassen wir gleiche c_i's zusammen, so können wir schreiben:

$$(*) \qquad f = c(X - c_1)^{n_1} \cdots (X - c_r)^{n_r}$$

mit $0 \neq c \in K$, $c_1, .., c_r \in K$ paarweise verschieden und $n_1 \geq 1, .., n_r \geq 1$

Also $n := \mathrm{Grad}(f) = n_1 + .. + n_r$, $f = cX^n + \cdots$ (c: höchster Koeffizient).

Mit $(*)$ gilt:

$\{c_1, .., c_r\}$ = Menge der Nullstellen von f.

Bemerkung: Analog zu ganzen Zahlen haben wir eine Kürzungsregel für Polynome: Seien $f, g, h \in K[X]$

$$fg = fh \text{ und } f \neq 0 \Rightarrow g = h.$$

denn: Annahme: $g \neq h$. Dann

$$\underbrace{f}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(g-h)}_{\neq 0} = fg - fh = 0$$

Widerspruch zu Kap. 3, Lemma 4.2.

Lemma 1.2 Sei $0 \neq f \in K[X]$ zerfallend. Seien $g, h \in K[X]$ mit $f = gh$. Dann sind auch g, h zerfallend.

Beweis: Sei $n = \mathrm{Grad}(f) \geq 0$. Vollständige Induktion nach n. Sei $n = 0$, also $f \in K$ konstant. Dann sind auch g, h konstant $(\mathrm{Grad}(f) = \mathrm{Grad}(g) + \mathrm{Grad}(h))$ also OK. Sei nun $n > 0$ und Behauptung bereits gezeigt für Polynome $0 \neq f' \in K[X]$ mit $\mathrm{Grad}(f') < n$.

f zerfallend $\Rightarrow$ es gibt wenigstens eine Nullstelle $c_1 \in K$, $f(c_1) = 0$. Dann $0 = f(c_1) = g(c_1)\, h(c_1)$ also $g(c_1) = 0$ oder $h(c_1) = 0$

1. Fall: $g(c_1) = 0$. Horner-Schema für Polynome (Kap. 3, Beisp. 4.11) $\Rightarrow$ es gibt $f' \in K[X]$ und $g' \in K[X]$ mit $f = (X - c_1) f'$, $g = (X - c_1) g'$

Dann $(X - c_1) f' = f = gh = (X - c_1) g' h$.

Kürzungsregel: $f' = g' h$.

f zerfallend $\Rightarrow$ f' zerfallend. Außerdem $\mathrm{Grad}(f') = n - 1$.

Also nach Induktion sind g', h zerfallend.

Dann ist aber auch $g = (X - c_1) g'$ zerfallend.

2. Fall: $h(c_1) = 0$ Völlig analog. $\square$

Bemerkung 1.3 Sei $0 \neq f \in K[X]$ und $c \in K$ Nullstelle von f, also $f(c)=0$. Dann gibt es genau ein $m \geq 1$ und ein $g \in K[X]$ mit

$$f = (X-c)^m \cdot g \quad \text{und} \quad g(c) \neq 0.$$

m heißt Vielfachheit der Nullstelle (Beweis Ü).

Ist also f zerfallend und Darstellung (*) gegeben, so ist m_i = Vielfachheit von c_i als Nullstelle von f.

Damit folgt auch: Darstellung (*) eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren.

Nun zu linearen Abbildungen $\varphi: V \to V$ mit V = endlich-dim. K-Vektorraum.

Def 1.4 Sei $U \subseteq V$ Teilraum von V. Dann heißt U φ-invariant, wenn $\varphi(u) \in U$ für alle $u \in U$ gilt.

z.B. sind $U=\{0\}$ und $U=V$ immer φ-invariant.

Sei nun $\{0\} \neq U \subsetneq V$ und $d = \dim U$, $n = \dim V$. Sei $B' = \{v_1, \dots, v_d\}$ Basis von U.

Ergänze zu Basis $B = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n\}$ von V.

Dann $\underset{1 \le j \le d}{\varphi(v_j)} \in U = \langle v_1, \dots, v_d \rangle_K$, also

$$M_B(\varphi) = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{A'}}^{d} \hphantom{\mid *} \\ \left[\begin{array}{c|c} A' & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\, d \\ \}\, \text{Rest} \end{array} \in M_n(K)$$

Wegen $\varphi(U) \subseteq U$ erhalten wir lineare Abbildung

$$\varphi' := \varphi|_U : U \to U \qquad \text{Einschränkung.}$$
$$u \mapsto \varphi(u)$$

Dann $\qquad M_{B'}(\varphi') = A' \in M_d(K)$.

Beispiele für φ-invariante Teilräume

$U = \mathrm{Kern}(\varphi) \qquad$ [Ist $u \in U$, dann $\varphi(u) = 0 \in U$].

$U = \mathrm{Bild}(\varphi) = \varphi(V) \qquad$ [Ist $u \in U$, dann $u = \varphi(v)$ für ein $v \in V$, also $\varphi(u) = \varphi(\varphi(v)) \in \mathrm{Bild}(\varphi)$]

<u>Def. 1.5</u> $\quad \varphi$ heißt <u>nilpotent</u>, wenn es ein $m \geq 1$ gibt mit $\varphi^m = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{m\text{-mal}} = 0_V$

Kap. 3, Lemma 5.8: $\quad \varphi$ nilpotent $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\mu}_\varphi = X^d$ für ein $d \geq 0$ (Minimalpolynom).

<u>Satz 1.6</u> $\quad$ Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) φ nilpotent.

(b) es gibt eine Basis B von V mit $M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$
(obere Dreiecksmatrix mit 0 auf der Diagonalen)

(c) Charakteristisches Polynom $\chi_\varphi = (-1)^n X^n$ $\quad (n = \dim V)$

<u>Beweis</u>: "a) $\Rightarrow$ b)" Vollständige Induktion nach $n = \dim V$.

$n = 1 \qquad M_B(\varphi) = [a] \quad 1 \times 1$ für jede Basis B.

$0 = M_B(\underbrace{\varphi^m}_{=0}) = [a^m] \Rightarrow a^m = 0 \Rightarrow a = 0$

also Aussage klar.

Sei nun $n = \dim V > 1$ und Aussage bereits bewiesen für Vektorräume echt kleinerer Dimension.

φ nilpotent $\Rightarrow$ $\tilde{\mu}_\varphi = X^m$ für $m \geq 1$.

$\Rightarrow$ 0 Nullstelle von $\tilde{\mu}_\varphi$ also 0 Eigenwert von φ.

d.h. es gibt $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = 0 \cdot v = 0$

also $\mathrm{Kern}(\varphi) \neq \{0\}$. Sei $U := \mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq V$.

Wegen $n = \underbrace{\dim \mathrm{Kern}(\varphi)}_{>0} + \dim \mathrm{Bild}(\varphi)$ ist

$\dim \mathrm{Bild}(\varphi) < n$, also $U \subsetneq V$, $d = \dim U < n$.

Sei $\varphi' = \varphi|_U : U \to U$ Einschränkung (U ist φ-invariant) Ist $\varphi^m = 0_V$, so gilt natürlich auch $\varphi'^m = 0_U$, also ist φ' nilpotent.

Nach Induktion gibt es Basis $B' = \{v_1, \dots, v_d\}$ von U mit $M_{B'}(\varphi') = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \in M_d(K)$.

Ergänze B' zu Basis $B = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n\}$ von V. Dann $\varphi(v_j) \in \mathrm{Bild}(\varphi) = U$

$d+1 \leq j \leq n$. also $\in \langle v_1, \dots, v_d \rangle_K$

d.h. $M_B(\varphi) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & & * & * \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \Big\} d$ gewünschte Form.

"b) $\Rightarrow$ c)" $A = M_B(\varphi)$ obere Dreiecksmatrix mit 0 auf Diagonale $\Rightarrow$ $\chi_\varphi = \det(A - X I_n) = (-X)^n = (-1)^n X^n$

"c) $\Rightarrow$ a)" $\chi_\varphi = (-1)^n X^n$. Cayley-Hamilton

$\Rightarrow (-1)^n A^n = 0 \Rightarrow \varphi^n = 0$. $\square$

Matrixversion von Satz 1.6. Ist $A \in M_n(K)$ nilpotent, so gibt es eine invertierbare Matrix $T \in M_n(K)$ mit $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$.

<u>Folgerung 1.7</u> Sei $\varphi: V \to V$ linear mit $\chi_\varphi = (\lambda - X)^n$ für ein $\lambda \in K$ $(n = \dim V)$. Dann gibt es eine Basis B von V mit $M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$

(obere Dreiecksmatrix mit λ auf Diagonalen)

<u>Beweis</u>: Sei zuerst C beliebige Basis von V und $A = M_B(\varphi) \in M_n(K)$. Setze $A' := A - \lambda I_n$.

Cayley-Hamilton: $0 = \chi_A(A) = \chi_\varphi(A) = (\lambda I_n - A)^n$
$= (-A')^n$ also $A'^n = 0$, d.h. A' nilpotent.

Also gibt es invertierbare Matrix $T \in M_n(K)$ mit $T^{-1}A'T = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$. Dann $T^{-1}AT = T^{-1}(A' + \lambda I_n)T$
$= T^{-1}A'T + \lambda I_n = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$.

T = Basiswechselmatrix von C zu neuer Basis B.
Damit $T^{-1}AT = M_B(\varphi)$ □

Obiger Beweis zeigt, daß es nützlich ist, nilpotente lineare Abbildungen weiter zu studieren.

<u>Satz 1.8</u> ("Fitting's Lemma") Sei $\dim V < \infty$ und $\varphi: V \to V$ linear. Dann gibt es φ-invariante Unterräume $U, U' \leq V$ mit $V = U \oplus U'$ und $\varphi|_U : U \to U$ nilpotent, $\varphi|_{U'}: U' \to U'$ invertierbar.

<u>Beweis:</u> Betrachte $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \dots$ klar:

$$\mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi^2) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi^3) \subseteq \dots \subseteq V$$

Teilräume von V.

Es gilt wegen $\dim V < \infty$ also ein $m \geq 1$ mit

$$\mathrm{Kern}(\varphi^m) = \mathrm{Kern}(\varphi^{m+1}) = \mathrm{Kern}(\varphi^{m+2}) = \dots$$

Setze $U := \mathrm{Kern}(\varphi^m)$ und $U' := \mathrm{Bild}(\varphi^m)$.

<u>Beh. 1</u> $U \cap U' = \{0\}$.

Dazu sei $v \in U \cap U'$. Dann $v = \varphi^m(w)$ für ein $w \in V$ und $\varphi^m(v) = 0$. Aber dann

$0 = \varphi^m(v) = \varphi^m(\varphi^m(w)) = \varphi^{2m}(w)$ also

$w \in \mathrm{Kern}(\varphi^{2m}) = \mathrm{Kern}(\varphi^m)$ und damit

$v = \varphi^m(w) = 0$

<u>Beh. 2</u> $V = U \oplus U'$.

Dazu sei $\psi := \varphi^m$. Dann

$$\dim V = \dim \mathrm{Kern}(\psi) + \dim \mathrm{Bild}(\psi) = \dim U + \dim U'$$

Also folgt Beh. 2 mit Beh. 1, siehe Kap. 1, 1.14.

$$\dim(U+U') = \dim U + \dim U' - \dim \underbrace{(U \cap U')}_{=0}$$
$$= \dim V$$

also $V = U + U'$.

<u>Beh. 3</u> U und U' sind φ-invariant

<u>Dazu:</u> Sei $v \in U = \mathrm{Kern}(\varphi^m)$. Dann

$$\varphi^m(\varphi(v)) = \varphi^{m+1}(v) = \varphi(\underbrace{\varphi^m(v)}_{=0}) = 0$$ also

$\varphi(v) \in U$ damit U φ-invariant.

Sei $w \in U' = \mathrm{Bild}(\varphi^m)$. Dann $w = \varphi^m(v)$ für ein $v \in V$ und $\varphi(w) = \varphi^{m+1}(v) = \varphi^m(\varphi(v)) \in \mathrm{Bild}(\varphi^m) = U'$

Also auch U' φ-invariant.

Beh. 4 $\quad \varphi|_U : U \to U$ ist nilpotent.

Dazu: $\quad U = \mathrm{Kern}(\varphi^m)$ d.h. $\quad \varphi^m(u) = 0$ für alle $u \in U$. Klar: $\quad \varphi^m(u) = (\varphi|_U)^m(u)$ also $\quad (\varphi|_U)^m = 0$ d.h. $\varphi|_U$ nilpotent.

Beh. 5 $\quad \varphi|_{U'} : U' \to U'$ invertierbar

Dazu: Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{Kern}(\varphi|_{U'}) = \{0\}$.
Sei also $v \in \mathrm{Kern}(\varphi|_{U'})$. Dann $v \in U' = \varphi^m(V)$ also $v = \varphi^m(v')$ für ein $v' \in V$. Dann
$\varphi^{m+1}(v') = \varphi(\varphi^m(v')) = \varphi(v) = 0$ weil $v \in \mathrm{Kern}(\varphi|_{U'})$
also $v' \in \mathrm{Kern}(\varphi^{m+1}) = \mathrm{Kern}(\varphi^m)$, d.h. $v = \varphi^m(v') = 0$ $\square$

Folgerung 1.9 Sei $V = U \oplus U'$ wie in Fitting's Lemma. Dann ist U eindeutig bestimmt. Es gilt

$$U = \{v \in V \mid \varphi^l(v) = 0 \text{ für ein } l \geq 1\}.$$

Beweis: Weil $\varphi|_U$ nilpotent, gibt es ein $m \geq 1$ mit $(\varphi|_U)^m = 0$, also $\varphi^m(u) = 0$ für alle $u \in U$.

Also $U \subseteq \{v \in V \mid \varphi^m(v) = 0\} \subseteq \{v \in V \mid \varphi^l(v) = 0$ für ein $l \geq 1\}$

Umgekehrt: Sei $v \in V$ mit $\varphi^l(v) = 0$ für ein $l \geq 1$.
Schreibe $v = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U'$.
Dann $0 = \varphi^l(v) = \varphi^l(u) + \varphi^l(u')$ wobei
$\varphi^l(u) \in U$ und $\varphi^l(u') \in U'$ (weil U, U' φ-invariant sind).
Wegen $V = U \oplus U'$ ist $\varphi^l(u) = 0$, $\varphi^l(u') = 0$
$\varphi|_{U'}$ invertierbar $\Rightarrow$ $(\varphi^l)|_{U'}$ invertierbar, also $u' = 0$
Damit $v = u \in U$.

Also sind obige Inklusionen "$\subseteq$" alles "$=$" $\square$.

<u>Def. 1.10</u> Sei $\dim V < \infty$, $\varphi: V \to V$ linear und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ. Dann heißt

$$H_\varphi(\lambda) := \{ v \in V \mid (\varphi - \lambda id_V)^l(v) = 0 \text{ für ein } l \geq 1 \}$$

der verallgemeinerte Eigenraum (oder auch Hauptraum) zu λ. Beachte: Ist $0 \neq v \in V$ Eigenvektor zum Eigenwert λ, so $\varphi(v) = \lambda v$, also $(\varphi - \lambda id_V)(v) = 0$ also gilt Bedingung mit $l = 1$, d.h. $v \in H_\varphi(\lambda)$. Setzen wir $\psi := \varphi - \lambda id_V$, so ist auch $\psi: V \to V$ linear und $H_\varphi(\lambda) = H_\psi(0) = \{ v \in V \mid \psi^l(v) = 0$ für ein $l \geq 1 \}$

also wie U in Folgerung 1.9, d.h. $H_\varphi(\lambda)$ ist ein Teilraum von V.

<u>Satz 1.11</u> Voraussetzungen wie in Def. 1.10. Dann gilt:

(a) $H_\varphi(\lambda)$ ist φ-invariant

(b) Es gibt einen φ-invarianten Teilraum $W \leq V$ mit $V = H_\varphi(\lambda) \oplus W$. Die Einschränkung $\varphi|_W : W \to W$ hat λ nicht als Eigenwert.

(c) Es gilt: $\dim H_\varphi(\lambda) =$ Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_φ.

<u>Beweis:</u> (a) Sei $\psi := \varphi - \lambda id_V$, also $H_\varphi(\lambda) = H_\psi(0) = U$ wie in Folgerung 1.10. Nach Fittings Lemma ist U ψ-invariant. Sei $u \in U$. Dann folgt:

$$\varphi(u) = (\psi + \lambda id_V)(u) = \underbrace{\psi(u)}_{\in U} + \underbrace{\lambda(u)}_{\in U} \in U.$$

Also ist $U = H_\varphi(\lambda)$ auch φ-invariant.

(b) Fittings Lemma für $\psi = \varphi - \lambda\, id_V$:
$V = U \oplus W$ mit $U = H_\varphi(\lambda)$ wie oben
W ψ-invariant und $\psi|_W : W \to W$ invertierbar
Gleiches Argument wie in (a) $\Rightarrow$ W auch φ-invariant.

Annahme: λ Eigenwert von $\varphi|_W$.
Sei $0 \neq w \in W$ Eigenvektor. Dann $\varphi(w) = \lambda w$
also $\psi(w) = (\varphi - \lambda\, id_V)(w) = \varphi(w) - \lambda w = 0$, d.h.
$w \in \mathrm{Kern}(\psi|_W)$, also $\psi|_W$ nicht invertierbar
Widerspruch.

(c) Sei $V = U \oplus W$ wie in (b); U, W sind ψ-invariant und φ-invariant. Sei
$d = \dim U$ und $B_1 = \{v_1, \dots, v_d\}$ Basis von U.
Weil $\psi|_U : U \to U$ nilpotent, können wir B_1 nach Satz 1.6 so wählen, daß

$$M_{B_1}(\psi|_U) = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & * \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann $M_{B_1}(\varphi|_U) = M_{B_1}(\psi|_U + \lambda\, id_U)$

$$= M_{B_1}(\psi|_U + \lambda\, id_U) = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & * \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & \ddots & * \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Sei $B_2 = \{v_{d+1}, \dots, v_n\}$ Basis von W ($n = \dim V$)

Dann ist $B = B_1 \cup B_2 = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n\}$ Basis von V
und

$$M_B(\varphi) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right]$$

A' = Matrix von $\varphi|_W : W \to W$ bzgl. B_2

$\Rightarrow \chi_\varphi = \det(M_B(\varphi) - X I_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Blockdiagonalmatrix}}}{=}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda - X & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - X \end{bmatrix}\right) \cdot \underbrace{\det(A' - X I_{n-d})}_{= \text{char. Pol. von } \varphi|_W}.$$

$= (\lambda - X)^d \cdot \chi_{\varphi|_W}$. Nach b) ist λ kein Eigenwert von $\varphi|_W$

also $\chi_{\varphi|_W}(\lambda) \neq 0$. Also gilt nach ÜB:

d = Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_φ $\square$.

Bevor wir die Haupträume zu verschiedenen Eigenwerten kombinieren, führen wir zuerst direkte Summen ein (für 2 Teilräume wurde dies bereits in LAAG 1, Kap. 2 gemacht)

Sei V K-Vektorraum und seien $U_1, \ldots, U_r \subseteq V$ Teilräume. Betrachte

$$U_1 \times \ldots \times U_r = \{(u_1, \ldots, u_r) \mid u_i \in U_i \text{ für } 1 \leq i \leq r\}.$$

(direktes Produkt von $U_1, \ldots, U_r$; dies ist wieder ein K-Vektorraum, siehe Kap. 2, Bem. 1.12).

Lineare Abbildung

$$f: U_1 \times \ldots \times U_r \longrightarrow V$$
$$(u_1, \ldots, u_r) \longmapsto u_1 + \ldots + u_r.$$

Ist f bijektiv, so läßt sich jedes $v \in V$

eindeutig schreiben als $v = u_1 + \dots + u_r$ mit $u_i \in U_i$ (47)
In diesem Fall heißt V die direkte Summe von
$U_1, \dots, U_r$. Schreibweise: $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$.

<u>Bemerkung 1.12</u> Sei $\dim V < \infty$. Mit obigen Bezeichnungen gilt:

(a) Ist $V = U_1 + \dots + U_r$ und $\dim V = \dim U_1 + \dots + \dim U_r$, so gilt $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$.

(b) Sei nun $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ und B_i Basis von U_i für $1 \leq i \leq r$. Dann ist $B := B_1 \cup \dots \cup B_r$ Basis von V.

<u>Beweis</u>: (a) Es gilt $(*)$ $\dim U_1 + \dots + \dim U_r$
$$= \dim (U_1 \times \dots \times U_r) = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f)$$
Ist $V = U_1 + \dots + U_r$, so ist f surjektiv, also $\dim \operatorname{Bild}(f) = \dim V$. Linke Seite von $(*)$ ebenfalls $= \dim V$ nach Voraussetzung, also muß $\dim \operatorname{Kern}(f) = 0$ sein, d.h. f injektiv.

(b) Sei $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$, also f bijektiv und $\dim V = \dim U_1 + \dots + \dim U_r$. Wegen
$$V = U_1 + \dots + U_r = \langle B_1 \rangle_K + \dots + \langle B_r \rangle_K = \langle B \rangle_K$$
ist B Erzeugendensystem von V. Wegen
$$|B| \leq |B_1| + \dots + |B_r| = \dim U_1 + \dots + \dim U_r = \dim V.$$
muß also $|B| = \dim V$ gelten und damit ist B auch l.u. $\square$

<u>Hauptsatz 1.13</u> (Hauptraumzerlegung). $\dim V < \infty$.
Sei $\varphi: V \to V$ zerfallende lineare Abbildung mit $\chi_\varphi = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschieden, $m_i \geq 1$
(Die λ_i sind die Eigenwerte von φ.) Dann gilt:

(a) $V = H_\varphi(\lambda_1) \oplus \dots \oplus H_\varphi(\lambda_r)$ und jedes $H_\varphi(\lambda_i)$ ist φ-invariant.

(b) $\dim H_\varphi(\lambda_i) = m_i$ und das charakteristische Polynom der Einschränkung von φ auf $H_\varphi(\lambda_i)$ ist $(\lambda_i - X)^{m_i}$.

(c) Für $1 \leq i \leq r$ gibt es Basis B_i von $H_\varphi(\lambda_i)$
mit $M_{B_i}(\varphi|_{H_\varphi(\lambda_i)}) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix} =: A_i \in M_{m_i}(K)$

Dann ist $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ Basis von V und

$$M_B(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \boxed{A_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \boxed{A_r} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\, m_1 \\ \}\, m_2 \\ \\ \}\, m_r \end{array}$$

Blockdiagonalgestalt.

Beweis: (a) $H_\varphi(\lambda_i)$ φ-invariant siehe Satz 1.11.
Außerdem $\dim H_\varphi(\lambda_i) = m_i =$ Vielfachheit von λ_i als Nullstelle von χ_φ.
Wegen $\dim V = n = m_1 + \dots + m_r$ müssen wir also noch zeigen $V = H_\varphi(\lambda_1) + \dots + H_\varphi(\lambda_r)$
(siehe Bem. 1.12 a).
Dazu: Vollständige Induktion nach r.
Ist $r = 1$, so folgt Beh. aus Satz 1.11.
denn dann $\chi_\varphi = (\lambda_1 - X)^n$ $n = m_1 = \dim H_\varphi(\lambda_1)$
also $V = H_\varphi(\lambda_1)$.
Sei nun $r > 1$. Nach Satz 1.11 ist $V = H_\varphi(\lambda_1) \oplus W$
mit W φ-invariant und λ_1 kein Eigenwert.

von $\varphi|_W: W \to W$. Wie im Beweis von Satz 1.11 (c) ist $\chi_\varphi = (\lambda_1 - X)^{m_1} \chi_{\varphi|_W}$

Lemma 1.2: χ_φ zerfallend $\Rightarrow$ $\chi_{\varphi|_W}$ zerfallend

Nullstellen von $\chi_{\varphi|_W}$ sind also $\lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Nach Induktion ist $W = H_{\varphi'}(\lambda_2) \oplus \dots \oplus H_{\varphi'}(\lambda_r)$

wobei $\varphi' := \varphi|_W: W \to W$. Klar:

$$H_{\varphi'}(\lambda_i) \subseteq H_\varphi(\lambda_i) \quad \text{für} \quad 2 \leq i \leq r.$$

Also $V = H_\varphi(\lambda_1) + W = H_\varphi(\lambda_1) + H_{\varphi'}(\lambda_2) + \dots + H_{\varphi'}(\lambda_r)$

$$\subseteq H_\varphi(\lambda_1) + H_\varphi(\lambda_2) + \dots + H_\varphi(\lambda_r) \subseteq V,$$

also überall "=" ✓.

(b), (c) Im Beweis von Satz 1.11 (c) wurde gezeigt, daß es Basis B_i von $H_\varphi(\lambda_i)$ gibt mit

$$M_{B_i}\left(\varphi|_{H_\varphi(\lambda_i)}\right) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix} =: A_i.$$

Also $\chi_{A_i} = \det(A_i - X I_{m_i}) = (\lambda_i - X)^{m_i}$

$B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ Basis von V nach Bem. 1.12 (b) und a). □

<u>Beispiel 1.14</u> Sei $K = \mathbb{C}$. Fundamentalsatz der Algebra: Jedes $0 \neq f \in \mathbb{C}[X]$ ist zerfallend. (Beweis: Analysis oder Algebra-Vorlesung) Also: Ist $\varphi: V \to V$ linear so ist φ immer zerfallend, also gibt es Basis B von V wie in Hauptsatz 1.13

Insbesondere: $M_B(\varphi)$ obere Dreiecksmatrix!

Dies haben wir in Kap. 5, Satz 5.8, ohne Beweis benutzt, jetzt also OK. ✓

§ 2 Zyklische Teilräume

Sei weiterhin K bel. Körper, V K-Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$ und $\varphi : V \to V$ linear.

Betrachte nun Polynome $K[X]$. Können φ in $f \in K[X]$ einsetzen.

Erinnerung $\mathcal{A} := \mathrm{End}(V) = \{ \psi : V \to V \mid \psi \text{ linear} \}$ ist eine K-Algebra (mit $\circ$ als Produkt)

Einsetzungshomomorphismus (Kap. 3, § 4)

$\varphi \in \mathcal{A}$ fest,
$$K[X] \to \mathcal{A}$$
$$f \mapsto f(\varphi).$$

Konkret: $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m \in K[X]$

Dann $f(\varphi) = a_0 \, id_V + a_1 \varphi + \dots + a_m \varphi^m \in \mathrm{End}(V)$

Sei B Basis von V und $A = M_B(\varphi) \in M_n(K)$

Dann
$$M_B(f(\varphi)) = a_0 M_B(id_V) + a_1 M_B(\varphi) + \dots + a_m M_B(\varphi^m)$$
$$= a_0 M_B(id_V) + a_1 M_B(\varphi) + \dots + a_m M_B(\varphi)^m$$
$$= a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_m A^m = f(A)$$

Also: $\boxed{M_B(f(\varphi)) = f(M_B(\varphi))}$

Damit auch $f(\varphi) = \underline{0} \iff M_B(f(\varphi)) = 0_{n \times n}$

$\iff f(M_B(\varphi)) = 0_{n \times n}.$

~~Minimalpolynom~~

Sei $\tilde{\mu}_\varphi$ = Minimalpolynom von φ, also $\tilde{\mu}_\varphi(\varphi) = \underline{0}$

und Ist $f \in K[X]$ beliebig mit $f(\varphi) = \underline{0}$,

dann $\mathrm{Grad}(\tilde{\mu}_\varphi) \le \mathrm{Grad}(f)$.

Wollen nun analog Minimalpolynom eines einzelnen Vektors $0 \neq v \in V$ definieren.

<u>Lemma 2.1</u> Sei $0 \neq v \in V$. Dann gilt:

(a) Es gibt ein $d \geq 1$ so daß $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^d(v)$ linear abhängig sind (l.a.)

(b) Sei $d \geq 1$ minimal wie in (a). Dann sind $v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v)$ l.u. und $\varphi^d(v) \in \langle v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v) \rangle_K$

<u>Beweis</u>: a) Sei $n = \dim V$. Dann sind die $n+1$ Vektoren $v, \varphi(v), \dots, \varphi^n(v)$ l.a.

Also kann man $d = n$ nehmen.

b) Wegen d minimal sind $v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v)$ l.u.

Es gibt $x_0, \dots, x_d \in K$, nicht alle gleich 0, mit

$$x_0 v + x_1 \varphi(v) + \dots + x_{d-1} \varphi^{d-1}(v) + x_d \varphi^d(v) = 0$$

<u>Ann.</u> $x_d = 0$. Dann $x_i \neq 0$ für ein $0 \leq i \leq d-1$, also $v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v)$ l.a. Widerspruch.

Damit $x_d \neq 0$ und

$$x_d^{-1} x_0 v + x_d^{-1} x_1 \varphi(v) + \dots + x_d^{-1} x_{d-1} \varphi^{d-1}(v) + \varphi^d(v) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi^d(v) \in \langle v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v) \rangle_K.$$

<u>Definition 2.2</u> Sei $0 \neq v \in V$ und $d \geq 1$ minimal wie in Lemma 2.1. Wegen $\varphi^d(v) \in \langle v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v) \rangle_K$ gibt es $a_0, \dots, a_{d-1} \in K$ mit

$$\varphi^d(v) = -a_0 v - a_1 \varphi(v) - \dots - a_{d-1} \varphi^{d-1}(v).$$

Da $v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v)$ l.u. sind, sind die a_i eindeutig bestimmt. Dann heißt

$$\mu_v = a_0 + a_1 X + \dots + a_{d-1} X^{d-1} + X^d \in K[X]$$

das Minimalpolynom von v (bzgl. φ)

Klar nach Def. $\mu_v(\varphi)(v) = 0$.

Ist $0 \neq f \in K[X]$ mit $f(\varphi)(v) = 0$, so

$\mathrm{Grad}(f) \geq \mathrm{Grad}(\mu_v) = d$. Denn:

$f = b_0 + b_1 X + \dots + b_m X^m$ mit $b_m \neq 0$.

$f(\varphi)(v) = 0$ heißt $b_0 v + b_1 \varphi(v) + \dots + b_m \varphi^m(v) = 0$.

$f \neq 0 \Rightarrow$ mindestens ein $b_i \neq 0$, also

$v, \varphi(v), \dots, \varphi^m(v)$ l.a., damit $m \geq d$.

Beispiel 2.3 Sei $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3$ und $\varphi: V \to V$

lineare Abbildung mit $\varphi(v) = Av$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Bestimme μ_{e_i} für Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3!

zu e_1: Berechne $e_1, \varphi(e_1), \varphi^2(e_1), \dots$ bis

$\varphi^d(e_1)$ Linearkombination der vorherigen ist.

$\varphi(e_1) = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \langle e_1 \rangle$, $\varphi^2(e_1) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Also $\mu_{e_1} = X^2 - 2$. $= 2e_1$ ✓

zu e_2: $\varphi(e_2) = e_2 \in \langle e_2 \rangle$ also $\mu_{e_2} = X - 1$.

zu e_3: $\varphi(e_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \notin \langle e_3 \rangle$, $\varphi^2(e_3) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2e_3$

also auch $\mu_{e_3} = X^2 - 2$.

Betrachte $v = e_1 + e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\varphi(v) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \langle v \rangle$, $\varphi^2(v) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \langle v \rangle$.

$\varphi^3(v) = A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\varphi^2(v) + 2\varphi(v) - 2v$ also $\mu_v = X^3 - X^2 - 2X + 2$
$= (X-1)(X^2-2)$

<u>Beispiel 2.4</u> Sei $n \geq 1$ und $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$
$\in K[X]$

Begleitmatrix

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in M_n(K)$$

Kap. 4, Beispiel 4.7: $\hat{\mu}_{A_f} = f$, $\chi_{A_f} = (-1)^n f$.

Sei $V = K^n$ und $\varphi : V \to V$ lineare Abbildung mit $\varphi(v) = A_f v$. $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ Basis der Einheitsvektoren, also $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_2) = e_3, \dots \varphi(e_{n-1}) = e_n$

und $\varphi(e_n) = -a_0 e_1 - a_1 e_2 - \dots - a_{n-1} e_n$.

Dann $\varphi^2(e_1) = e_3$, $\varphi^3(e_1) = e_4, \dots, \varphi^{n-1}(e_1) = e_n$

$\Rightarrow$ $e_1, \varphi(e_1), \dots, \varphi^{n-1}(e_1)$ l.u.

und $\varphi^n(e_1) = \varphi(e_n) = -a_0 e_1 - \dots - a_{n-1} e_{n-1}$.

Also $\mu_{e_1} = f$.

<u>Lemma 2.5</u> Sei $0 \neq v \in V$ und $d \geq 1$ minimal wie in Lemma 2.1, $\mu_v \in K[X]$ Minimalpolynom von v.

Sei $U_v := \langle v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v) \rangle_K \subseteq V$ Teilraum.

(a) $B' = \{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v)\}$ Basis von U_v

also $\dim U_v = d$.

(b) U_v ist φ-invariant.

(c) Ergänze B' zu Basis $B = \{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v), v_{d+1}, \dots, v_n\}$ ($n = \dim V$). Dann

$$M_B(\varphi) = \begin{array}{c} d\{ \\ \\ \end{array}\!\!\left[\begin{array}{c|c} A_{\mu_v} & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \in M_n(K).$$

Beweis: (a) Klar nach Lemma 2.1

(b) Sei $u \in U_v$ beliebig, $u = x_0 v + x_1 \varphi(v) + \dots + x_{d-1} \varphi^{d-1}(v)$ mit $x_i \in K$. Dann

$$\varphi(u) = x_0 \underbrace{\varphi(v)}_{\in U_v} + x_1 \underbrace{\varphi^2(v)}_{\in U_v} + \dots + x_{d-2} \underbrace{\varphi^{d-1}(v)}_{\in U_v} + x_{d-1} \varphi^d(v).$$

Aber $\varphi^d(v) \in \langle v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v) \rangle_K = U_v$.

also insgesamt $\varphi(u) \in U_v$.

(c) $M_{B'}(\varphi|U_v) = A_{\mu_v}$ klar nach Definition von A_{μ_v} und B' siehe Beispiel oben $\square$.

Ist $0 \neq v \in V$, so heißt $U_v \leq V$ "φ-zyklischer Teilraum"

Bevor wir damit fortfahren, zunächst noch ein Einschub über Polynome:

<u>Satz 2.6</u> (Teilen mit Rest für Polynome)
Gegeben seien $f, g \in K[X]$ mit $g \neq 0$. Dann gibt es eindeutige $q, r \in K[X]$ mit $f = q \cdot g + r$, wobei entweder $r = 0$ oder $r \neq 0$ und $\mathrm{Grad}(r) \lneq \mathrm{Grad}(g)$.

Ist $r = 0$, so schreiben wir auch $g | f$ "g teilt f".

Beweis: Zuerst Eindeutigkeit. Sei $f = q g + r = q' g + r'$ mit Bedingungen an r, r' wie oben. Dann

$$(q - q') g = r' - r.$$

Annahme: $q \neq q'$ Dann $q - q' \neq 0$, also $r' - r \neq 0$ und

$$\underbrace{\mathrm{Grad}(r' - r)}_{< \mathrm{Grad}(g)} = \mathrm{Grad}(q - q') + \mathrm{Grad}(g) \geq \mathrm{Grad}(g)$$

Widerspruch

Also $q = q'$ und dann auch $r = r'$.

Jetzt Verfahren zur Bestimmung von q, r.

Ist $f = 0$, so setze $q = r = 0$ ok.

Sei nun $f \neq 0$. Ist $\mathrm{Grad}(f) < \mathrm{Grad}(g)$, so setze $q = 0$, $r = f$ ok.

Sei schließlich $\mathrm{Grad}(f) \geq \mathrm{Grad}(g)$. Schreibe

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad \text{mit } a_n \neq 0, \text{ also } n = \mathrm{Grad}(f).$$

$$g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \quad \text{mit } b_m \neq 0 \text{ also } m = \mathrm{Grad}(g))$$

Setze $f' := f - b_m^{-1} a_n X^{n-m} g \in K[X]$

Nun ist

$$b_m^{-1} a_n X^{n-m} g = b_m^{-1} a_n X^{n-m} (b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m)$$

$$= b_m^{-1} a_n b_0 X^{n-m} + b_m^{-1} a_n b_1 X^{n-m+1} + \ldots + \underbrace{a_n X^n}_{\text{höchster Term von } f}$$

Also f' entweder gleich 0 oder $\neq 0$ und Polynom mit $\mathrm{Grad}(f') < \mathrm{Grad}(f)$.

Ist $f' = 0$, so $f = b_m^{-1} a_n X^{n-m} g$, also $g \mid f$ $(r = 0)$.

Ist $f' \neq 0$, so fahre fort mit f'. Nach endlich vielen Schritten erhalte gewünschte Form. □

<u>Beispiel</u> $f = X^4 + X^2 + 1$ $\quad n = 4 \quad a_4 = 1$

$g = X^2 + X + 2$ $\quad m = 2 \quad b_2 = 1$.

$$f' = f - X^2 g = X^4 + X^2 + 1 - X^2(X^2 + X + 2)$$
$$= \cancel{X^4} + X^2 + 1 - \cancel{X^4} - X^3 - 2X^2 = -X^3 - X^2 + 1$$

Also jetzt $n = 3$, $a_3 = -1$.

$$f'' = f' + Xg = -X^3 - X^2 + 1 + X(X^2 + X + 2) =$$

$= -\cancel{X^3} - X^2 + 1 + \cancel{X^3} + X^2 + 2X = 2X+1$

Grad echt kleiner als $m = \text{Grad}(g) = 2$

also fertig:

$$f = f' + X^2 g = (f'' - Xg) + X^2 g = (X^2 - X)g + f''$$

$$= \underbrace{(X^2-X)}_{=q} g + \underbrace{2X+1}_{=r}.$$

<u>Satz 2.7</u> Sei $\varphi: V \to V$ lineare Abbildung.

(a) Ist $f \in K[X]$ mit $f(\varphi) = \underline{0}$, so $\tilde{\mu}_\varphi \mid f$.

(b) Ist $0 \neq v \in V$ und $f \in K[X]$ mit $f(\varphi)(v) = 0$, so $\mu_v \mid f$.

(c) Ist $0 \neq v \in V$, so gilt $\mu_v \mid \tilde{\mu}_\varphi$.

<u>Beweis</u>: (a) Teile mit Rest $f = q \cdot \tilde{\mu}_\varphi + r$.

Annahme $r \neq 0$. Dann

$$\underline{0} = f(\varphi) = (q \cdot \tilde{\mu}_\varphi + r)(\varphi) = q(\varphi)\underbrace{\tilde{\mu}_\varphi(\varphi)}_{=0} + r(\varphi) = r(\varphi).$$

Wäre $r \neq 0$, dann $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(\tilde{\mu}_\varphi)$,

Widerspruch zu Kap. 3, Bem. 5.1:

$\tilde{\mu}_\varphi$ hat kleinstmöglichen Grad mit $\tilde{\mu}_\varphi(\varphi) = \underline{0}$.

(b) völlig analog: $f = q \cdot \mu_v + r$. Dann

$$0 = f(\varphi)(v) = (q \cdot \mu_v + r)(\varphi)(v) = q(\varphi)\underbrace{\mu_v(\varphi)(v)}_{=0} + r(\varphi)(v)$$

$$= r(\varphi)(v).$$

<u>Annahme</u> $r \neq 0$. Dann $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(\mu_v) = d$.

Also $r = b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m$ mit $b_m \neq 0$, $m < d$.

Dann $0 = r(\varphi)(v) = b_0 v + b_1 \varphi(v) + \ldots + b_m \varphi^m(v)$.

also $\{v, \varphi(v), \ldots, \varphi^m(v)\}$ l.a., Widerspruch Lemma 2.1.

(c) Wegen $\tilde{\mu}_\varphi(\varphi) = \underline{0}$ ist auch $\tilde{\mu}_\varphi(\varphi)(v) = 0$

also folgt Behauptung sofort aus b) $\square$

<u>Def. 2.8</u> Sei $\varphi: V \to V$ linear und

$$d_{max} := \max \{ \mathrm{Grad}(\mu_v) \mid 0 \neq v \in V \}.$$
$$= \max \{ \dim U_v \mid 0 \neq v \in V \}.$$
(Lemma 2.5)

Ein Vektor $0 \neq v \in V$ heißt maximaler Vektor (bzgl. φ), wenn $\mathrm{Grad}(\mu_v) = \dim U_v = d_{max}$ gilt (Ein solcher Vektor existiert, weil $\dim U_v \leq \dim V$ für alle $0 \neq v \in V$)

<u>Satz 2.9</u> (H. G. Jacob 1973) Sei $0 \neq v \in V$ maximaler Vektor (bzgl. $\varphi: V \to V$). Dann gibt es einen φ-invarianten Teilraum $W \leq V$ mit $V = U_v \oplus W$.

<u>Beweis</u>: Sei $d \geq 1$ minimal wie in Lemma 2.1, also $\dim U_v = d$ mit Basis $B' = \{v_1, \ldots, v_d\}$ wobei $v_1 = v$, $v_2 = \varphi(v), \ldots, v_d = \varphi^{d-1}(v)$.

Ergänze zu Basis $B = \{v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_n\}$ von V ($n = \dim V$) Jedes $u \in V$ läßt sich eindeutig schreiben als $u = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ mit $x_i \in K$

Setze $[u]_d := x_d =$ Koeffizient von $v_d = \varphi^{d-1}(v)$.

Dann definiere

$$W := \langle u \in V \mid [\varphi^{i-1}(u)]_d = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq d \rangle_K.$$

<u>Beh. 1</u> $W \leq V$ Teilraum mit $\dim W \geq n-d$.

<u>Denn</u>: Für $1 \leq i \leq d$ sei $A^{(i)} = [a_{k\ell}^{(i)}] \in M_n(K)$ Matrix von $\varphi^{i-1}: V \to V$ bzgl. Basis B.

Sei $u \in V$ beliebig, $u = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ mit $x_j \in K$

also $M_B(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n$ Koordinatenvektor.

Dann $M_B(\varphi^{i-1}(u)) = A^{(i)} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Damit

$0 = [\varphi^{i-1}(u)]_d = d$-te Komponente von $M_B(\varphi^{i-1}(u))$

$= d$-te Komponente von $A^{(i)} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{dj}^{(i)} x_j$.

Also $W = \left\{ u = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \ (x_j \in K) \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_{dj}^{(i)} x_j = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq d \right\}$

homogenes lineares Gleichungssystem mit d Gleichungen und n Unbekannten

Lösungs~~raum~~menge ist Teilraum der Dimension $\geq n-d$.

Also auch $W \subseteq V$ Teilraum mit $\dim W \geq n-d$ ✓.

Beh. 2 $U_v \cap W = \{0\}$.

Dazu sei $w \in U_v \cap W$. Schreibe $w = x_1 v_1 + \ldots + x_d v_d$ mit $x_j \in K$. $w \in W \Rightarrow [\varphi^{i-1}(w)]_d = 0$ für $1 \leq i \leq d$.

Für $i = 1$ folgt $\varphi^{i-1} = \varphi^0 = id_V$ also $[w]_d = x_d = 0$.

Nun $\varphi(w) = x_1 \underbrace{\varphi(v_1)}_{= v_2} + \ldots + x_{d-1} \underbrace{\varphi(v_{d-1})}_{= v_d} = x_1 v_2 + \ldots + x_{d-1} v_d$.

Also $0 = [\varphi(w)]_d = x_{d-1}$. Dann betrachte

$\varphi^2(w) = x_1 \underbrace{\varphi^2(v_1)}_{= v_3} + \ldots + x_{d-2} \underbrace{\varphi^2(v_{d-2})}_{= v_d} = x_1 v_3 + \ldots + x_{d-2} v_d$.

Also $0 = [\varphi^2(w)]_d = x_{d-2}$ usw. bis

$x_d = x_{d-1} = x_{d-2} = \ldots = x_1 = 0$, also $w = 0$.

<u>Beh. 3</u> $V = U_v \oplus W$.

<u>Dazu</u>: $n = \dim V \geq \dim(U_v + W) = \dim U_v + \dim W - \underbrace{\dim(U_v \cap W)}_{=0}$

$= \underbrace{\dim U_v}_{=d} + \underbrace{\dim W}_{\geq n-d} \geq n.$

also gilt überall "=" und damit $V = U_v + W$.
Mit Beh. 2 ist Summe direkt.

<u>Beh. 4</u> W ist φ-invariant.

Dazu sei $0 \neq w \in W$ beliebig. Müssen zeigen $\varphi(w) \in W$.

Sei $d' = \mathrm{Grad}(\mu_w) \geq 1$. Da v maximaler Vektor ist, gilt $d' \leq d$.

Sei nun $w' := \varphi(w)$. Müssen zeigen $[\varphi^{i-1}(w')]_d = 0$
für $1 \leq i \leq d$.

Ist $i < d$, dann $\varphi^{i-1}(w') = \varphi^{i-1}(\varphi(w)) = \varphi^i(w)$ also
$[\varphi^{i-1}(w')]_d = [\varphi^i(w)]_d = 0$ weil $i < d$ und $w \in W$.

Sei nun $i = d$. Dann $\varphi^{d-1}(w') = \varphi^{d-1}(\varphi(w)) = \varphi^d(w)$.

Sei $\mu_w = b_0 + b_1 X + \dots + b_{d'-1} X^{d'-1} + X^{d'}$ Dann

$0 = \mu_w(\varphi)(w) = b_0 w + b_1 \varphi(w) + \dots + b_{d'-1} \varphi^{d'-1}(w) + \varphi^{d'}(w)$

Also $\varphi^{d'}(w)$ = Linearkombination von $w, \varphi(w), \dots, \varphi^{d'-1}(w)$.

Wende noch $\varphi^{d-d'}$ an, erhalte:

$\varphi^d(w) = \varphi^{d-d'}(\varphi^{d'}(w))$ = Linearkombination von
$\varphi^{d-d'}(w), \varphi^{d-d'+1}(w), \dots, \varphi^{d-1}(w)$

Schreibe alle diese Vektoren als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$.

Weil $[\varphi^{i-1}(w)]_d = 0$ für $1 \leq i \leq d$, folgt dann
auch $[\varphi^d(w)]_d = 0$.

<u>Folgerung 2.10</u> Sei $V = U_v \oplus W$ wie in Satz 2.9,
wobei $0 \neq v \in V$ maximaler Vektor (bzgl. φ). Dann gilt:

(a) μ_v ist das Minimalpolynom von φ

(b) Das Minimalpolynom von $\varphi|_W : W \to W$ teilt μ_v.

Beweis: Müssen zeigen $\mu_v(\varphi)(u) = 0$ für alle $u \in V$.
Sei $u \in V$ und schreibe $u = u_0 + w$ mit $u_0 \in U_v$ und $w \in W$. Da μ_v auch Minimalpolynom von $\varphi|_{U_v} : U_v \to U_v$ ist (siehe Beisp 2.4), folgt $\mu_v(\varphi)(u_0) = 0$. Müssen also noch zeigen: $\mu_v(\varphi)(w) = 0$ für alle $w \in W$.
(Dann folgt sowohl (a) also auch (b), siehe Satz 2.7)
Sei $f := \mu_{v+w} \in K[X]$. Dann

$$0 = f(\varphi)(v+w) = f(\varphi)(v) + f(\varphi)(w), \text{ also}$$

$$f(\varphi)(v) = -\underbrace{f(\varphi)(w)}_{\text{Linearkombination von } w, \varphi(w), \varphi^2(w), \ldots}$$

Weil W φ-invariant, ist rechte Seite in W.
Analog: linke Seite in U_v. Wegen $U_v \cap W = \{0\}$ folgt dann $f(\varphi)(v) = 0 = f(\varphi)(w)$.
Satz 2.7 $\Rightarrow$ $\mu_v \mid f$, also $\text{Grad}(f) \geq \text{Grad}(\mu_v)$.
Aber v maximaler Vektor, also auch —"— $\leq$ —"—
und damit $\text{Grad}(f) = \text{Grad}(\mu_v)$.
Zusammen mit $\mu_v \mid f$ folgt: $\mu_v = f$.
Also $\mu_v(\varphi)(w) = f(\varphi)(w) = 0$ und damit

$$\mu_v = \tilde{\mu}_\varphi \text{ Minimalpolynom von } \varphi$$ □

Hauptsatz 2.11 (Zerlegung in φ-zyklische Teilräume).
Sei $\varphi: V \to V$ lineare Abbildung ($n = \dim V < \infty$).
Dann gibt es Vektoren $0 \neq v_1, \ldots, v_d \in V$ mit
(a) $V = U_{v_1} \oplus U_{v_2} \oplus \ldots \oplus U_{v_d}$.
(b) $\mu_{v_d} \mid \mu_{v_{d-1}} \mid \ldots \mid \mu_{v_1} = \tilde{\mu}_\varphi$.

Beweis: Vollständige Induktion nach $n = \dim V$.
Ist $n = 1$, so $V = U_v$ für jedes $0 \neq v \in V$.

Sei nun $n > 1$ und Beh. bereits bewiesen für Vektorräume echt kleinerer Dimension. Sei $0 \neq v_1 \in V$ ein maximaler Vektor. Nach Satz 2.9 gibt es einen φ-invarianten Teilraum $W \leq V$ mit $V = U_{v_1} \oplus W$. Nach Folgerung 2.10 ist $\mu_{v_1} = \tilde{\mu}_\varphi$ Minimalpolynom von φ und das Minimalpolynom von $\varphi|_W : W \to W$ ein Teiler von μ_{v_1}. Nach Induktion gibt es Vektoren $0 \neq v_2, \dots, v_d \in W$ mit $W = U_{v_2} \oplus \dots \oplus U_{v_d}$.
Jeder U_{v_i} ist hier $\varphi|_W$-invariant, also auch φ-invariant. Damit gilt bereits

$$V = U_{v_1} \oplus U_{v_2} \oplus \dots \oplus U_{v_d}.$$

Nach Induktion gilt außerdem:

$$\mu_{v_2} = \tilde{\mu}_{\varphi|_W} \quad \text{und} \quad \mu_{v_d} \mid \mu_{v_{d-1}} \mid \dots \mid \mu_{v_2}.$$

Wie oben bemerkt ist $\tilde{\mu}_{\varphi|_W} \mid \mu_{v_1}$, also auch $\mu_{v_2} \mid \mu_{v_1}$ □

<u>Folgerung 2.12</u> (Frobenius-Normalform) Sei $\varphi : V \to V$ lineare Abbildung ($n = \dim V < \infty$). Dann gibt es eine Basis B von V mit

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} \boxed{A_{f_1}} & & & 0 \\ & \boxed{A_{f_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_{f_d}} \end{bmatrix}$$

wobei $f_i = \mu_{v_i} \in K[X]$ für $0 \neq v_i \in V$ und $f_d \mid f_{d-1} \mid \dots \mid f_1 = \tilde{\mu}_\varphi$ gilt.

<u>Beweis</u>: Sei $V = U_{v_1} \oplus \dots \oplus U_{v_d}$ wie im Hauptsatz 2.11; setze $f_i := \mu_{v_i}$

Lemma 2.5: U_{v_i} hat Basis B_i mit

$M_{B_i}(\varphi|_{U_{v_i}}) = A_{\mu_{v_i}}$ für $1 \leq i \leq d$.

$B = B_1 \cup \dots \cup B_d$ ist Basis von V mit gewünschten Eigenschaften $\square$

<u>Beisp. 2.13</u> Sei $\varphi: V \to V$ linear $(n = \dim V < \infty)$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Es gibt ein $0 \neq v \in V$ mit $\dim U_v = \dim V$
(v ist dann also automatisch ein max. Vektor)

(b) Es gibt eine Basis B von V mit $M_B(\varphi) = A_f$
wobei $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in K[X]$

(c) $\operatorname{Grad}(\tilde{\mu}_\varphi) = n$.

<u>Bew.</u>: "a) ⇒ b)" siehe Lemma 2.5. Wegen $\dim U_v = \dim V$ ist $V = U_v$.

"b) ⇒ c)" Siehe Beisp. 2.4 $\chi_{A_f} = (-1)^n f$ und $\tilde{\mu}_\varphi = f$ hat Grad n.

"c) ⇒ a)" Sei $0 \neq v \in V$ maximaler Vektor. Nach Folgerung 2.10 ist $\mu_v = \tilde{\mu}_\varphi$ hat also Grad n
d.h. $\dim U_v = \operatorname{Grad}(\mu_v) = n = \dim V$ $\square$.

<u>Bemerkung 2.14</u> Sei $M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} \boxed{A_{f_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_{f_d}} \end{bmatrix}$

wie in Folgerung 2.12
wobei $f_d | f_{d-1} | \dots | f_1$ und die f_i höchsten Koeffizienten gleich 1 haben. Dann kann man zeigen, daß $f_1, \dots, f_d$ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt sind. Siehe Lemma 3 im Artikel von K. Bongartz, https://arxiv.org/abs/1410.1683.

§3 Die Jordan-Normalform

Weiterhin K beliebiger Körper, V K-Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$ und $\varphi: V \to V$ linear.

Kehren zurück zur Situation in §1: Sei φ zerfallend, also $\chi_\varphi = (-1)^n (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_r)^{m_r}$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ alle verschieden und $m_i \geq 1$ für alle i.

Die λ_i sind also genau die Eigenwerte von φ. [Diese Situation liegt z.B. immer vor, wenn $K = \mathbb{C}$.]

Nach Hauptsatz 1.13 gilt dann:

$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ wobei $V_i = H_\varphi(\lambda_i)$ verallgemeinerter Eigenraum zum Eigenwert λ_i.

Jedes V_i ist φ invariant; sei $\varphi_i := \varphi|_{V_i}: V_i \to V_i$

Dann $\chi_{\varphi_i} = (\lambda_i - X)^{m_i}$, $m_i = \dim V_i$

und es gibt Basis B_i von V_i mit

$$M_{B_i}(\varphi_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

__Ziel:__ Optimiere Basis B_i, so daß möglichst viele der Einträge "$*$" zu 0 werden!

Können uns also jetzt auf ~~d~~ ein $\varphi_i: V_i \to V_i$ konzentrieren mit $\chi_{\varphi_i} = (\lambda_i - X)^{m_i}$

Wie in §1 setze $\psi_i := \varphi_i - \lambda_i \, id_{V_i} : V_i \to V_i$.

Dann $M_{B_i}(\psi_i) = M_{B_i}(\varphi_i - \lambda_i \, id_{V_i})$

$$= M_{B_i}(\varphi_i) - \lambda_i I_{m_i} = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix},$$ also ψ_i nilpotent (Satz 1.6)

Brauchen also nur Basis B_i bzgl. ψ_i (nilpotent!) zu optimieren!

Sei $\lambda \in K$, $m \in \mathbb{N}$. Wie in ÜGA5 bzgl.

$$J_m(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \in M_m(K)$$ Jordan-Block zum Eigenwert λ.

Für $\lambda = 0$ ist also

$$J_m := J_m(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \in M_m(K).$$

<u>Hauptsatz 3.1</u> (Jordan-Normalform für nilpotente Endomorphismen) Sei $\psi: V \to V$ eine nilpotente lineare Abbildung. Dann gibt es $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ mit $n = \dim V = m_1 + \dots + m_r$ und $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$ und eine Basis B von V mit

$$M_B(\psi) = \begin{bmatrix} J_{m_1} & & & 0 \\ & J_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{m_r} \end{bmatrix}$$

<u>Beweis:</u> ψ nilpotent $\quad$ Kap. 3, Lemma 5.8 (LAAG1)

$\Rightarrow \tilde{\mu}_\psi = X^{m_1}$ für ein $m_1 \geq 1$.

Wegen $\operatorname{Grad}(\tilde{\mu}_\psi) \leq \operatorname{Grad}(\chi_\psi) = n$ ist $1 \leq m_1 \leq n$.

Hauptsatz 2.11: Es gibt $0 \neq v_1, \dots, v_r \in V$ mit

$V = U_{v_1} \oplus \dots \oplus U_{v_r}$ $\quad \mu_{v_r} \mid \mu_{v_{r-1}} \mid \dots \mid \mu_{v_1} = \tilde{\mu}_\psi$.

Wegen $\tilde{\mu}_\psi = X^{m_1}$ folgt $\mu_{v_2} = X^{m_2}$ mit $1 \leq m_2 \leq m_1$.

$\mu_{v_3} = X^{m_3}$ mit $1 \leq m_3 \leq m_2$ usw.

Also $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_r$ und

$n = \dim V = \dim U_{v_1} + \ldots + \dim U_{v_r} =$
$\mathrm{Grad}(\mu_{v_1}) + \ldots + \mathrm{Grad}(\mu_{v_r}) = m_1 + \ldots + m_r.$

Wie in Folgerung 2.12 gibt es Basis B_i von U_{v_i} mit

$$M_{B_i}(\psi|_{U_{v_i}}) = A_{\mu_{v_i}} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nach Ü10 gibt es auch Basis B_i' von U_{v_i} mit

$$M_{B_i'}(\psi|_{U_{v_i}}) = A_{\mu_{v_i}}^{tr} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = J_{m_i}$$

Dann ist $B := B_1' \cup \ldots \cup B_r'$ Basis von V so daß $M_B(\psi)$ gewünschte Form hat. $\square$

<u>Hauptsatz 3.2</u> (Jordan-Normalform für zerfallende Endomorphismen) Sei $\varphi: V \to V$ zerfallend mit $\chi_\varphi = (-1)^n (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_r)^{m_r}$ wie oben. Dann gibt es eine Basis B von V mit

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_r} \end{bmatrix} \quad \text{mit } A_i \in M_{m_i}(K)$$

wobei A_i wiederum Blockdiagonalgestalt wie folgt hat:

$$A_i = \begin{bmatrix} \boxed{J_{m_{i1}}(\lambda_i)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_{ir_i}}(\lambda_i)} \end{bmatrix}$$

mit $m_{i1} + \ldots + m_{ir_i} = m_i$ und $m_{i1} \geq m_{i2} \geq \ldots \geq m_{ir_i} \geq 1.$

Beweis: Kombiniere die diversen Hauptsätze, die wir bisher in diesem Kapitel gezeigt haben.

Hauptsatz 1.13: $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$

mit $V_i = H_\varphi(\lambda_i)$ verallgemeinerter Eigenraum zu λ_i.

Sei $\varphi_i := \varphi|_{V_i} : V_i \to V_i$ und $\psi_i := \varphi_i - \lambda_i \, id_{V_i}$.

Haben oben gesehen: ψ_i nilpotent.

Nach Hauptsatz 3.1 gibt es also Basis B_i von V_i

mit $$M_{B_i}(\psi_i) = \begin{bmatrix} \boxed{J_{m_{i1}}} & & & 0 \\ & \boxed{J_{m_{i2}}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{m_{ir_i}}} \end{bmatrix}$$

mit $m_{i1} + \dots + m_{ir_i} = m_i$ und $m_{i1} \geq m_{i2} \geq \dots \geq m_{ir_i}$.

Dann $M_{B_i}(\varphi_i) = M_{B_i}(\psi_i + \lambda_i \, id_{V_i})$

$= M_{B_i}(\psi_i) + \lambda_i I_{m_i} = A_i$ wie oben.

Schließlich ist $B := B_1 \cup \dots \cup B_r$ gewünschte Basis. $\square$

Beisp. 3.3 Sei $K = \mathbb{F}_2$ und $\varphi : K^5 \to K^5$ lineare Abbildung mit $\varphi(v) = Av$, $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Üg A3.

$\chi_\varphi = X^5 + X^3 = X^3(X^2+1) = X^3(X+1)^2$

also zerfallend mit Eigenwerten 0 und 1

Es gibt Basis B von K^5 mit

$$M_B(\varphi) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$$ wobei: A_1 = Jordan-Blöcke zu $\lambda_1 = 0$

A_2 = Jordan-Blöcke zu $\lambda_2 = 1$.

Berechne $\tilde{\mu}_\varphi = X^4 + X^3 = X^3(X+1)$.

(!) ⇝ Man kann B so wählen, daß Jordan-Normalform gegeben ist durch

$$M_B(\varphi) = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & \boxed{1} & \\ & 0 & & & \boxed{1} \end{array}\right]$$

1 Block $J_3(0)$, 2 Blöcke $J_1(1)$.

<u>Bemerkung 3.4</u> Sei $\varphi: V \to V$ und χ_φ wie in Hauptsatz 3.2, also

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{bmatrix}$$

und A_i = Blockdiagonalmatrix mit Jordan-Blöcken zum Eigenwert λ_i der Größe $m_{i1} \geq m_{i2} \geq \ldots \geq m_{ir_i}$

also r_i = Anzahl der Blöcke zum Eigenwert λ_i.

Dann gilt:

(a) $r_i = \dim E_\varphi(\lambda_i) \leftarrow$ Eigenraum zum Eigenwert λ_i.

(b) $\tilde{\mu}_\varphi = (X-\lambda_1)^{m_{11}} \cdots (X-\lambda_r)^{m_{r1}}$

Also: Größe des größten Jordan-Blocks kann man am Minimalpolynom ablesen.

<u>Beweis.</u> (a) $\dim E_\varphi(\lambda_i) = n - \text{Rang}(A - \lambda_i I_n)$

wobei A = Matrix von φ bzgl. irgendeiner Basis.

Wähle B so, daß A in Jordan-Normalform.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{bmatrix}$$ wie oben $\quad A_j - \lambda_i I_{m_j}$ invertierbar für $i \neq j$

also Beitrag m_j zum Rang,

$$A_i - \lambda_i I_{m_i} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{m_{i1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{Y}_{m_{ir_i}} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Y}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$ hat Rang $m-1$, also insgesamt Beitrag $(m_{i1}-1) + \dots + (m_{ir_i} - 1)$

$= m_i - r_i$ zum Rang.

Also $\operatorname{Rang}(A - \lambda_i I_n) = \sum_{j \neq i} m_j + m_i - r_i$

$= n - r_i$ ✓.

b) $\tilde{\mu}_\varphi = \mu_A$ wobei $A =$ Matrix von φ bzgl. irgendeiner Basis.

Wähle wieder $A =$ Jordan-Normalform.

$\overset{!}{\cup}$ $\quad \mu_A = \operatorname{kgV}(\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_r})$.

$\chi_{A_i} = (\lambda_i - \lambda)^{m_i} \quad \Rightarrow \quad \mu_{A_i} = (\cancel{X} - \cancel{X_i})^{m_i'}$

mit $m_i' \leq m_i$

$\mu_{\mathcal{Y}_m(\lambda)} = (X - \lambda)^m$

$$(A_i - \lambda_i I_{m_i})^{m_i'} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{m_{i1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{Y}_{m_{ir_i}} \end{bmatrix}^{m_i'}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{m_{i1}}^{m_i'} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{Y}_{m_{ir_i}}^{m_i'} \end{bmatrix}$$

Dies wird 0 genau dann, wenn $m_i' = m_{i1}$.

Also b).

Also in obigem Beispiel berechne
dim $E_A(0) = 1$ und dim $E_A(1) = 2$.

Dann 1 Block zum Eigenwert 0, Größe 3×3
(siehe $\tilde{\mu}_\varphi$)

und 2 Blöcke zum Eigenwert 1, maximale Größe 1×1 (siehe $\tilde{\mu}_\varphi$), also 2 Blöcke der Größe 1×1.

<u>Beispiel 3.5</u> Welche Jordan-Normalformen gibt es für $n = 2, 3$?

<u>$n=2$</u> $\chi_\varphi = (X-\lambda)^2$ oder $\chi_\varphi = (X-\lambda)(X-\mu)$ mit $\lambda \neq \mu$.

Ist $\chi_\varphi = (X-\lambda)(X-\mu)$ mit $\lambda \neq \mu$, so φ diagonalisierbar

also JNF $\left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \mu \end{array}\right]$

Sei nun $\chi_\varphi = (X-\lambda)^2$ Dann 2 Fälle:

a) $\tilde{\mu}_\varphi = X - \lambda \Rightarrow \varphi$ diagonalisierbar

also JNF $\left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right]$

b) $\tilde{\mu}_\varphi = (X-\lambda)^2 \Rightarrow$ 1 Block der Größe 2×2,

also JNF $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

<u>$n=3$</u> $\tilde{\chi}_\varphi = (X-\lambda)(X-\mu)(X-\nu)$ mit $\lambda, \mu, \nu \in K$.

a) $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda \Rightarrow \varphi$ diagonalisierbar, also

JNF $\left[\begin{array}{c|c|c} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mu & 0 \\ \hline 0 & 0 & \nu \end{array}\right]$

b) $\lambda = \mu \neq \nu$ Dann $\tilde{\mu}_\varphi = (X-\lambda)(X-\nu)$

oder $\tilde{\mu}_\varphi = (X-\lambda)^2 (X-\nu)$ $\rightarrow$ JNF

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & \nu \end{array}\right].$$

c) $\lambda = \mu = \nu$ nur Blöcke zum Eigenwert λ

also JNF $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $(\tilde{\mu}_\varphi = (X-\lambda)^3)$

oder $\left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$ $(\tilde{\mu}_\varphi = (X-\lambda)^2]$

oder $\left[\begin{array}{c|c|c} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$ $(\tilde{\mu}_\varphi = X-\lambda]$.