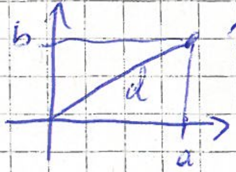
Kapitel 5: Skalarprodukte (8 Doppelstunden)

Motivation: Abstand in $\mathbb{R}^2$



$v = \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$

$d(v) =$ Abstand von v zu 0.

$= \sqrt{a^2+b^2}$ Satz von Pythagoras

Analog in $\mathbb{R}^n$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow d(v) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Beobachtung: $x_1^2 + \dots + x_n^2 = v^{tr} \cdot v = [x_1, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Definiere allgemeiner:

$$\langle v, w \rangle := v^{tr} \cdot w = [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

wobei $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Erhalten also Abbildung $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$.

Eigenschaften des Matrixproduktes:

$$\langle a v_1 + b v_2, w \rangle = a \langle v_1, w \rangle + b \langle v_2, w \rangle$$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle w, v \rangle.$$

Also β "symmetrische Bilinearform"

§1 Bilinearformen

Voraussetzung: K beliebiger Körper, V K-Vektorraum.

<u>Definition 1.1:</u> Eine Abbildung $\beta : V \times V \to K$ heißt Bilinearform, wenn folgende Bedingungen gelten:

$\beta(av_1 + bv_2, w) = a\beta(v_1, w) + b\beta(v_2, w)$

$\beta(v, aw_1 + bw_2) = a\beta(v, w_1) + b\beta(v, w_2)$

für alle $v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ und $a, b \in K$.

"β ist linear in jedem Argument"

β heißt symmetrisch, wenn $\beta(v, w) = \beta(w, v)$ für alle $v, w \in V$ gilt.

$v, w \in V$ heißen "orthogonal", wenn $\beta(v, w) = \beta(w, v) = 0$ gilt.

<u>Beispiel 1.2</u> (a) $V = K^n$

$$\beta_1(v, w) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{wobei } v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$= v^{tr} \cdot w$ wie oben bezeichne dies auch mit $\langle v, w \rangle$.

Dann $\beta_1 : V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform "Standard-Bilinearform auf $V = K^n$"

Etwas allgemeiner: Sei $A \in M_n(K)$ beliebig, fest.

Definiere $\beta_A : K^n \times K^n \to K$

durch $\beta_A(v, w) := v^{tr} \cdot A \cdot w = [x_1, \dots, x_n] A \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Beachte: $\beta_A(v, w) = \langle v, Aw \rangle = \beta_1(v, Aw)$

Eigenschaften des Matrixprodukts:

β_A Bilinearform, $\beta_1 = \beta_{I_n}$.

Ist $A = A^{tr}$ symmetrisch, so gilt:

$$\beta_A(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i x_j = \beta_A(w,v)$$

also β_A symmetrisch.

(b) $V = P_n(\mathbb{R}) = \{$ reelle Polynomfunktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$ $\}$.

$\beta(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ ist eine symmetrische Bilinearform.

(c) $V = K^2$ $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ Dann

$$\beta_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =$$
$$[x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{bmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Bilinearform mit

$\beta_A(v,w) = -\beta_A(w,v)$ für alle $v, w \in K^2$

<u>Definition 1.3</u> Sei dim $V = n < \infty$ und

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V

$\beta: V \times V \to K$ Bilinearform. Dann heißt

$M_B(\beta) := [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ Gram-Matrix von β bezgl. B, wobei $a_{ij} := \beta(v_i, v_j)$ für $1 \leq i,j \leq n$.

In obigen Beispielen:

(a) $V = K^n$ $\quad B = \{e_1, \dots, e_n\}$ Standardbasis mit $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$ $\quad$ Dann $M_B(\beta_A) = A$.

(b) $P_n(\mathbb{R})$ hat Basis $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ mit

$p_i(x) = x^i$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$a_{ij} = \beta(p_i, p_j) = \int_0^1 x^{i+j}\,dx = \frac{1}{i+j+1} x^{i+j+1}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{i+j+1} \quad \text{also} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/{n+1} \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/{n+2} \\ 1/3 & & \text{---} & & \\ \vdots & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

<u>Satz 1.4</u> Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V, also $\dim V = n < \infty$, $\beta: V \times V \to K$ Bilinearform mit $A := M_B(\beta) \in M_n(K)$.

Seien $v, w \in V$ $\quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$

mit $x_i, y_i \in K$.

also $M_B(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $M_B(w) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

Koordinatenvektoren bzgl. B.

Dann gilt $\beta(v, w) = [x_1, \ldots, x_n] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$= M_B(v)^{tr} \cdot M_B(\beta) \cdot M_B(w)$ $\qquad$ Insbesondere: $\beta(0, w) = \beta(v, 0) = 0$

<u>Außerdem:</u> β symmetrisch $\iff$ $A = M_B(\beta)$ symmetrische Matrix.

<u>Beweis:</u> $\beta(v, w) = \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, w\right) = \sum_{i=1}^n x_i \beta(v_i, w)$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \beta\left(v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \underbrace{\beta(v_i, v_j)}_{= a_{ij}}$$

$= \beta_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_n \end{bmatrix}\right)$, siehe oben.

$= [x_1, \ldots, x_n]\, A \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$

β symmetrisch $\Rightarrow$ $a_{ij} = \beta(v_i, v_j) = \beta(v_j, v_i)$
$= a_{ji}$, also $A = A^{tr}$.

Umgekehrt: Sei $A = A^{tr}$ symmetrisch.

Beispiel 1.2(a) $\Rightarrow$ $\beta_A : K^n \times K^n \to K$ symmetrisch.

also $\beta(v, w) = \beta_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) = \beta_A\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$
$= \beta(w, v)$ ✓ $\square$

Satz 1.5 (Basiswechsel) Seien B, C Basen von V
$\dim V = n < \infty$, also $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $C = \{w_1, \dots, w_n\}$.
$\beta : V \times V \to K$ Bilinearform. Sei
$T = M^C_B(\mathrm{id}_V) \in M_n(K)$ Basiswechselmatrix
$= [t_{ij}]$

also $w_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} v_i$ für $1 \le j \le n$

Dann gilt: $M_C(\beta) = T^{tr} \cdot M_B(\beta) \cdot T$.

Beweis: $\beta(w_k, w_l) = \sum_{i=1}^n t_{ik}\, \beta(v_i, w_l)$
$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ik}\, t_{jl}\, \beta(v_i, v_j) =$

$G = (g_{ij})$ Gram-Matrix bzgl. B, also $g_{ij} = \beta(v_i, v_j)$

Damit $\beta(w_k, w_l) = \sum_{i,j=1}^n t_{ik}\, g_{ij}\, t_{jl} = (T^{tr} G T)_{kl}$

$\uparrow$

(k,l)-Eintrag der Gram-Matrix bzgl. C. $\square$

Gegenüberstellung Sei $n = \dim V < \infty$,
B, C Basen von V.

(1) Ist $\varphi : V \to V$ lineare Abbildung, so

haben wir die darstellenden Matrizen
$M_B(\varphi)$ und $M_C(\varphi) \in M_n(K)$. Es gilt:

$$M_C(\varphi) = T^{-1} M_B(\varphi)\, T \quad , \text{wobei } T = M_B^C(\mathrm{id}_V)$$

Basiswechselmatrix

siehe Kapitel 3, Beispiel 2.13,

(2) Ist $\beta: V \times V \to K$ Bilinearform, so haben wir die Gram-Matrizen $M_B(\beta)$ und $M_C(\beta)$.
Es gilt: $M_C(\beta) = T^{tr} \cdot M_B(\beta) \cdot T$ siehe Satz 1.5.

Betrachte zum Beispiel:

(1) $$\det(M_C(\varphi)) = \det(T^{-1} M_B(\varphi) T) = \det(T)^{-1} \det(M_B(\varphi)) \cdot \det(T)$$
$$= \det(M_B(\varphi))$$

Determinante bleibt gleich

(2) $$\det(M_C(\beta)) = \det(T^{tr} \cdot M_B(\beta)\, T) = \det(T^{tr}) \det(M_B(\beta)) \cdot \det(T)$$
$$= \det(T)^2 \det(M_B(\beta))$$

Determinante wird mit einem Quadrat multipliziert.

Insbesondere: Ist $\det(M_B(\varphi)) \neq 0$ bzw. $\det(M_B(\beta)) \neq 0$ für eine Basis B, so gilt dies auch für jede andere Basis C.

<u>Def 1.6</u> Sei $\dim V < \infty$ und $\beta: V \times V \to K$ Bilinearform. Dann heißt β nicht-ausgeartet, wenn es eine Basis B von V gibt mit $\det(M_B(\beta)) \neq 0$. (Nach Vorbemerkung gilt dies dann auch für jede andere Basis C).

Satz 1.7 Sei $\dim V < \infty$ und $\beta : V \times V \to K$ Bilinearform. Dann sind äquivalent:

(1) β nicht ausgeartet.

(2) Es gibt kein $0 \neq v \in V$ mit $\beta(v, w) = 0$ für alle $w \in V$.

(3) Es gibt kein $0 \neq w \in V$ mit $\beta(v, w) = 0$ für alle $v \in V$.

Beweis: Sei $n = \dim V$ und $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V.

$G = [g_{ij}]$ Gram-Matrix

$$g_{ij} = \beta(v_i, v_j) \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n.$$

Sei $v \in V$ und $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ mit $x_i \in K$

Dann gilt $\beta(v, w) = 0$ für alle $w \in V$

$\iff \beta(v, v_j) = 0$ für $1 \leq j \leq n$.

β linear im 2. Argument

$$\iff \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\beta(v_i, v_j)}_{= g_{ij}} = 0$$

$$\iff [x_1, \ldots, x_n] \cdot G = [0, \ldots, 0]$$

Analog sei $w \in V$ und $w = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$ mit $y_j \in K$.

Dann gilt $\beta(v, w) = 0$ für alle $v \in V$

$\iff \beta(v_i, w) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$

β linear im 1. Argument

$$\iff \sum_{j=1}^{n} y_j \underbrace{\beta(v_i, v_j)}_{= g_{ij}} = 0$$

$$\iff G \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Also (2) $\iff$ Gleichungssystem $[x_1, \ldots, x_n] \cdot G = [0, \ldots, 0]$ hat nur 0-Lösung

$\iff G^{tr} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ hat nur 0-Lösung

Kapitel 1
$\Leftrightarrow$ $G^{-\text{tr}}$ invertierbar $\Leftrightarrow$ G invertierbar

$\Leftrightarrow \det(G) \neq 0$.

Analog:

(3) $\Leftrightarrow$ Gleichungssystem $G \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ hat nur

0-Lösung $\Leftrightarrow$ $\det(G) \neq 0$. $\square$

Zum Beispiel ist das Standard-Produkt

$K^n \times K^n \to K, \quad (v,w) \mapsto \langle v,w \rangle = v^{tr} \cdot w$

nicht-ausgeartet, weil Gram-Matrix bzgl. Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ genau die Einheitsmatrix I_n ist.

<u>Satz 1.8</u> Sei $\dim V < \infty$ und $\beta : V \times V \to K$ nicht-ausgeartete Bilinearform. Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi^* : V \to V$ mit

$$\beta(\varphi(v), w) = \beta(v, \varphi^*(w)) \text{ für alle } v, w \in V.$$

φ^* heißt die zu φ adjungierte Abbildung.

<u>Beweis:</u> Sei $n = \dim V$ und B Basis von V.

Sei $A := M_B(\varphi) \in M_n(K)$ darstellende Matrix

$G := M_B(\beta) \in M_n(K)$ Gram-Matrix bzgl. B.

Nach Kapitel 3, Satz 2.9, ist die Abbildung

$\Phi^B_B : \operatorname{End}(V) \to M_n(K), \quad \varphi \mapsto M_B(\varphi)$,

linear und bijektiv. Zu gegebenem $A' \in M_n(K)$ gibt es also immer genau ein $\psi : V \to V$ linear mit $M_B(\psi) = A'$. Nun ist β nicht-ausgeartet, also $\det(G) \neq 0$.

Setze $A' := G^{-1} A^{tr} G$ und sei $\varphi' : V \to V$ lineare Abbildung mit $M_B(\varphi') = A'$. Dann gilt

$$\beta(v, \varphi'(w)) \underset{\text{Satz 1.4}}{=} M_B(v)^{tr} \cdot G \cdot \underbrace{M_B(\varphi'(w))}_{\substack{= M_B(\varphi') \cdot M_B(w) \\ \text{Kapitel 3, Lemma 2.7}}}$$

$$= M_B(v)^{tr} \cdot \underbrace{G A'}_{= A^{tr} G \text{ nach Def von } A'} \cdot M_B(w)$$

$$= M_B(v)^{tr} \cdot A^{tr} G M_B(w) = (\underbrace{A M_B(v)}_{= M_B(\varphi(v))})^{tr} G M_B(w)$$

$$= M_B(\varphi(v))^{tr} G M_B(w) = \beta(\varphi(v), w) \quad \checkmark$$

Also gilt Aussage mit $\varphi^* := \varphi'$.

Eindeutigkeit: Sei auch $\psi : V \to V$ linear mit $\beta(\varphi(v), w) = \beta(v, \psi(w))$ für alle $v, w \in V$.

Sei $w \in V$ fest. Dann:

$\beta(v, \psi(w)) = \beta(\varphi(v), w) = \beta(v, \varphi^*(w))$ für alle $v \in V$

also $\beta(v, \psi(w) - \varphi^*(w)) = 0$ für alle $v \in V$.

Satz 1.7 $\Rightarrow$ $\psi(w) = \varphi^*(w)$ also φ^* eindeutig. $\square$

<u>Beispiel 1.9</u> Sei $V = K^n$ und $\beta : V \times V \to K$ Standard-Form, $\beta(v, w) = v^{tr} \cdot w = \langle v, w \rangle$. Sei $A \in M_n(K)$ und $\varphi_A : K^n \to K^n$, $v \mapsto Av$ zug. lineare Abbildung.

Sei $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ Basis der Einheitsvektoren

also $M_B(\beta) = I_n = G$ $\quad M_B(\varphi_A) = A$.

Obiger Beweis $\quad M_B(\varphi^*) = A' = G^{-1} A^{tr} G = A^{tr}$.

Also $\varphi^* : K^n \to K^n$, $v \mapsto A^{tr} \cdot v$.

§2 Orthogonalität

Von nun an: $\beta: V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform.

$v, w \in V$ heißen **orthogonal** (bzgl. β), wenn

$$\beta(v,w) = \beta(w,v) = 0$$ gilt. In Zeichen: $v \perp w$

Ist $X \subseteq V$ beliebige Teilmenge, so setze

$$X^\perp := \{ v \in V \mid \beta(v,x) = 0 \text{ für alle } x \in X \}.$$

Weil β linear in jedem Argument ist, folgt sofort:

$$X^\perp \leq V \quad \text{Teilraum von } V.$$

Lemma 2.1 Sei $\dim V < \infty$ und $\beta: V \times V \to K$ nicht-ausgeartet. Dann gilt $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

Beweis: Sei $n = \dim V$, $d = \dim U$.

Ist $d = 0$, also $U = \{0\}$, so $U^\perp = V$; Aussage gilt also. Sei nun $d \geq 1$. Sei $\{v_1, \dots, v_d\}$ Basis von U. Nach Basisergänzungssatz können wir diese zu Basis $B = \{v_1, \dots, v_d, \dots, v_n\}$ von V ergänzen. Sei $G = [g_{ij}] = M_B(\beta) \in M_n(K)$.

$$g_{ij} = \beta(v_i, v_j) \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

und $G' := [g_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{d \times n}$ (ersten d Zeilen von G).

Sei $v \in V$ beliebig, $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ mit $x_j \in K$.

Dann gilt

$$v \in U^\perp \iff \beta(u,v) = 0 \text{ für alle } u \in U$$

$$\iff \beta(v_i, v) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq d.$$

β linear im 1. Argument

$$\iff \sum_{j=1}^{n} x_j \, \beta(v_i, v_j) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq d.$$

$\Leftrightarrow \quad G' \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems

Also $\dim U^\perp = n - \text{Rang}(G') = \dim V - \text{Rang}(G')$

β nicht-ausgeartet $\Rightarrow \det(G) \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(G) = n$
$\Rightarrow$ Zeilen von G sind l.u. $\Rightarrow$ Zeilen von G' sind l.u. $\Rightarrow$ $\text{Rang}(G')$ = Anzahl Zeilen $= d$ □

<u>Satz 2.2</u> Sei $\dim V < \infty$, $\beta: V \times V \to K$ nicht-ausgeartet und $U \leq V$ Teilraum mit $U \cap U^\perp = \{0\}$. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$.
(Jedes $v \in V$ läßt sich eindeutig schreiben als $v = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U^\perp$, siehe Kap. 2, Def. 1.14).

<u>Beweis</u>: Kap. 2, Satz 4.15 $\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \underbrace{\dim(U \cap U^\perp)}_{=0} = \dim U + \dim U^\perp$
$= \dim V$ nach Lemma 2.1. Also ist $V = U + U^\perp$.
Summe direkt wegen $U \cap U^\perp = \{0\}$ □

<u>Bemerkung 2.3</u> Sei $0 \neq v \in V$. Dann heißt v isotrop, wenn $\beta(v,v) = 0$ gilt.

(a) Ist v isotrop und $U = \langle v \rangle_K \leq V$, so $U \leq U^\perp$ also $U \cap U^\perp = U \neq \{0\}$ z.B.:
$V = K^2$ $\beta: V \times V \to K$ Standard-Bilinearform
$\beta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2$
Ist $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$, so ≥ 0 und $= 0$ nur für $x = y = 0$, also keine isotropen Vektoren.

Ist $K = \mathbb{C}$ und $x = 1$, $y = +i$, so $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ isotrop.

Ist $K = \mathbb{F}_2$ und $x = y = 1$, so $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ isotrop.

(b) Sei nun $0 \neq v \in V$ nicht isotrop und wähle $U = \langle v \rangle_K$. Dann $U^\perp = \{ w \in V \mid \beta(w,v) = 0 \}$.
$v \notin U^\perp$ also $U \cap U^\perp = \{0\}$. In diesem Fall gilt auch $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$ (auch ohne Voraussetzung, daß β nicht-ausgeartet ist.

denn: sei $w \in V$ beliebig und setze

$w' := w - \beta(v,v)^{-1} \beta(v,w) v$ Dann

$$\beta(v,w') = \beta(v,w) - \beta(v,v)^{-1} \beta(v,w) \beta(v,v) = 0$$

also $w' \in \langle v \rangle^\perp$ und damit $w \in \langle v \rangle + \langle v \rangle^\perp$

d.h. $V = \langle v \rangle_K + \langle v \rangle_K^\perp$ Summe direkt wegen $U \cap U^\perp = \{0\}$.

<u>Definition 2.4</u> Sei $n = \dim V < \infty$ und $\beta : V \times V \to K$ beliebige symmetrische Bilinearform. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis. Dann heißt $\mathcal{B}$ eine Orthogonalbasis, wenn $\beta(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$ gilt.

also $$M_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$ mit $d_i = \beta(v_i, v_i)$ für $1 \leq i \leq n$.

Gilt auch $d_i = 1$ für alle i, so heißt $\mathcal{B}$ Orthonormalbasis (ONB) von V.

<u>Vorteil Orthogonalbasis</u> Seien $v, w \in V$ $\quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $\quad w = \sum_{j=1}^n y_j v_j$ mit $x_i, y_j \in K$. Dann

$$\beta(v,w) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \underbrace{\beta(v_i, v_j)}_{=0 \text{ für } i \neq j} = \sum_{i=1}^n d_i x_i y_i$$

Insbesondere auch $\beta(v,v) = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$.

Satz 2.5 Sei $n = \dim V < \infty$ und $\beta: V \times V \to K$ nicht ausgeartet. Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthogonalbasis von V und $d_i := \beta(v_i, v_i)$ für $1 \leq i \leq n$.

Dann gilt $d_i \neq 0$ für alle i.

Für $v \in V$ beliebig ist $v = \sum_{i=1}^{n} d_i^{-1} \beta(v, v_i) v_i$.

[Bei einer Orthogonalbasis B ist also Koordinatenvektor $M_B(v)$ sehr einfach zu bestimmen].

Beweis: $M_B(\beta) = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$ also $\det(M_B(\beta)) = d_1 d_2 \cdots d_n$.

β nicht-ausgeartet, also $\det(M_B(\beta)) \neq 0$, also $d_i \neq 0$ für alle i.

Sei $v \in V$ beliebig $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ mit $x_j \in K$

Sei $1 \leq i \leq n$ fest. Dann

$$\beta(v, v_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\beta(v_j, v_i)}_{=0 \text{ für } i \neq j} = x_i \beta(v_i, v_i) = x_i d_i$$

Also $x_i = d_i^{-1} \beta(v, v_i)$ □.

Folgerung 2.6 Sei $\dim V < \infty$ und $\beta: V \times V \to K$ nicht ausgeartet. Sei $U \leq V$ Teilraum mit $U \cap U^\perp = \{0\}$. Nach Satz 2.2 gilt also $V = U \oplus U^\perp$.

Sei $d = \dim U \geq 1$ und $C = \{u_1, \ldots, u_d\}$ eine Orthogonalbasis von U. Sei $v \in V$ beliebig und $v = u + u'$ eindeutige Darstellung mit $u \in U$, $u' \in U^\perp$.

Dann gilt $\beta(u_i, u_i) \neq 0$ für alle i

und $u = \sum_{i=1}^{d} \beta(u_i, u_i)^{-1} \beta(v, u_i) u_i$

Also läßt sich auch die Darstellung $v = u + u'$ sehr einfach bestimmen!

Beweis: Sei $1 \leq i \leq d$. Annahme: $\beta(u_i, u_i) = 0$

Dann auch $\beta(u_i, u_j) = 0$ für $j \neq i$, also

$\beta(u_i, u) = 0$ für alle $u \in U$ (weil β linear im 2. Argument)

Also $u_i \in U \cap U^\perp$ Widerspruch zu $U \cap U^\perp = \{0\}$

Sei $v = u + u'$ wie oben. Nach Satz 2.5 gilt

$$u = \sum_{i=1}^{d} \beta(u_i, u_i)^{-1} \beta(u, u_i)\, u_i.$$

Schließlich: $\beta(v, u_i) = \beta(u + u', u_i) = \beta(u, u_i) + \underbrace{\beta(u', u_i)}_{=0, \text{ weil } u' \in U^\perp}$

also $\beta(u, u_i) = \beta(v, u_i)$ für alle i. $\square$

Frage: Gibt es immer Orthogonalbasen.

I. A. nein, aber meistens:

Satz 2.7 Sei $\dim V < \infty$, $\beta: V \times V \to K$ beliebige symmetrische Bilinearform. Es gelte $1 + 1 \neq 0$ in K.

Dann gibt es eine Orthogonalbasis von V.

Beweis: Sei $n = \dim V \geq 1$. Vollständige Induktion nach n. Ist $n = 1$, so Aussage klar

$G = $ Gram-Matrix $= [g_{11}]$ 1×1-Matrix

Sei nun $n \geq 2$ und Aussage bereits gezeigt für Vektorräume kleinerer Dimension.

1. Fall: $\beta(v, v) = 0$ für alle $v \in V$.

Seien $v, w \in V$ beliebig. Dann

$$0 = \beta(v + w, v + w) = \underbrace{\beta(v, v)}_{=0} + \beta(v, w) + \beta(w, v) + \underbrace{\beta(w, w)}_{=0}$$

$$= \beta(v, w) + \beta(w, v) \underset{\beta \text{ symmetrisch}}{\uparrow} \beta(v, w) + \beta(v, w) = \underbrace{(1+1)}_{\neq 0} \beta(v, w)$$

Also $\beta(v, w) = 0$

Also $\beta: V \times V \to K$ Null-Abbildung.

Also $M_B(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ bzgl. jeder Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

Also B Orthogonalbasis mit $d_i = \beta(v_i, v_i) = 0$ für alle i.

2. Fall: Es gibt ein $v_1 \in V$ mit $\beta(v_1, v_1) \neq 0$.

Dann $v_1 \neq 0$ nicht isotrop. Also nach Bem. 2.3 (b)

$V = \langle v_1 \rangle \oplus W$ mit $W = \langle v_1 \rangle^\perp$ und

~~[illegible]~~ $\dim W = \dim V - \dim \langle v_1 \rangle = n-1$.

Betrachte Einschränkung $\beta|_{W \times W} : W \times W \to K$

wiederum symmetrische Bilinearform. Also gibt es nach Induktion eine Orthogonalbasis $\{v_2, \dots, v_n\}$ von W. Wegen $V = \langle v_1 \rangle + W = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K$

ist $B := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von V.

Es gilt $\beta(v_1, v_i) = 0$ für $i \geq 2$ weil $v_i \in W = \langle v_1 \rangle^\perp$

Also B Orthogonalbasis von V. $\square$

Satz 2.7 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung).

Sei $\beta: V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform

mit $(*)$ $\beta(v, v) \neq 0$ für alle $0 \neq v \in V$.

Sei $n \geq 1$ und $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängige Folge in V. Dann gibt es eine linear unabhängige $(w_1, \dots, w_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ für $1 \leq k \leq n$.

(b) $\beta(w_i, w_i) \neq 0$ und $\beta(w_i, w_j) = 0$ für $i \neq j$

(c) $w_1 := v_1$

$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta(v_k, w_i)}{\beta(w_i, w_i)} w_i \quad \text{für } k = 2, \dots, n.$$

Beweis: Vollständige Induktion nach n.

Ist $n=1$, so $w_1 := v_1$ also (a), (b), (c) klar.

Sei nun $n \geq 2$. ~~ ~~ Wende Induktion auf $(v_1, \dots, v_{n-1})$, erhalte $(w_1, \dots, w_{n-1})$ so dass (a), (b), (c) gilt.

Wegen (b) können wir definieren

$$w_n := v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta(v_n, w_i)}{\beta(w_i, w_i)} w_i.$$

$$\Rightarrow \quad v_n = w_n + \sum_{i=1}^{n-1} (\dots) w_i \in \langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle_K$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\langle v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \rangle_K}_{\text{linear unabh., also } \dim = n} \subseteq \underbrace{\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle_K}_{\dim \leq n}.$$

Also $\dim \langle w_1, \dots, w_n \rangle_K$ und damit $(w_1, \dots, w_n)$ linear unabhängig.

Insbesondere $w_n \neq 0$ und $\beta(w_n, w_n) \neq 0$. (siehe (P))

Bleibt noch zu zeigen $\beta(w_k, w_n) = 0$ für $1 \leq k \leq n-1$.

Dazu: $\beta(w_k, w_n) = \beta\left(w_k, v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta(v_n, w_i)}{\beta(w_i, w_i)} w_i\right)$

$$= \beta(w_k, v_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta(v_n, w_i)}{\beta(w_i, w_i)} \underbrace{\beta(w_k, w_i)}_{=0 \text{ für } k \neq i}.$$

$$= \beta(w_k, v_n) - \frac{\beta(v_n, w_k)}{\beta(w_k, w_k)} \beta(w_k, w_k) = 0.$$

Damit (a), (b), (c) auch für $(w_1, \dots, w_n)$ gezeigt. □

__Beispiel 2.8__ Sei $V = P_n(\mathbb{R})$ Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$. Basis $B = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ mit $p_i(x) = x^i$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Kap. 2, § 3).

$\beta(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ symmetrische Bilinearform

$\beta(f,f) = \int_0^1 \underbrace{f(x)^2}_{\geq 0}\,dx = 0$ nur für $f = \underline{0}$

Also Bedingung $(*)$ in Satz 2.7 erfüllt.

Wende Verfahren an auf Folge $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$.

$l_0 := p_0 \qquad l_1 := p_1 - \dfrac{\beta(p_1, l_0)}{\beta(l_0, l_0)}\, l_0, \ldots,$

Man erhält $l_0(x) = 1 \qquad l_1(x) = x, \quad l_2(x) = x^2 - 1/3$

$l_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$ "Legendre-Polynome"

siehe (1).

§3 Symmetrische Bilinearformen über $\mathbb{R}$

In diesem Abschnitt sei stets $K = \mathbb{R}$, V $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform. Sei $n = \dim V < \infty$. Nach Satz 2.7 gibt es eine Orthogonalbasis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V

also $\underset{\text{Gram-Matrix}}{M_B(\beta)} = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}$ mit $d_i = \beta(v_i, v_i)$ für $1 \leq i \leq n$.

Wegen $K = \mathbb{R}$ gilt $d_i = 0$ oder $d_i > 0$ oder $d_i < 0$.

Ist $d_i > 0$, so ersetze v_i durch $v_i' = \sqrt{d_i}^{-1} v_i$.

Dann $\beta(v_i', v_i') = \sqrt{d_i}^{-1}\sqrt{d_i}^{-1}\beta(v_i, v_i) = 1$.

Ist $d_i < 0$, so ersetze v_i durch $v_i' = \sqrt{-d_i}^{-1} v_i$.

Dann $\beta(v_i', v_i') = \sqrt{-d_i}^{-1}\sqrt{-d_i}^{-1}\beta(v_i, v_i) = -1$

Ist $d_i = 0$, so setze $v_i' := v_i$.

Also neue Basis $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ mit

$\beta(v_i', v_i') = 0, 1,$ oder -1.

Satz 3.1 (Trägheitssatz von Sylvester)
Sei $\dim V = n < \infty$. Dann gibt es eine Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V mit

$$M_B(\beta) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, p \\ \}\, q \end{array}$$

Hierbei sind p, q durch β eindeutig bestimmt, d.h. ist auch $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ Basis mit

$$M_C(\beta) = \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, p' \\ \}\, q' \end{array}$$

so gilt $p = p'$, $q = q'$.

Beweis: Wie oben starte mit irgendeiner Orthogonalbasis, normiere dann so, daß auf der Diagonalen nur $0, 1$ oder -1 steht und wähle Reihenfolge so, daß zuerst p-mal 1, dann q-mal -1 und danach nur 0 auf der Diagonalen steht.
Also gibt es Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit gewünschten Eigenschaften. Sei nun $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ weitere solche Basis. Betrachte Teilräume

$$U_1 := \langle v_1, \ldots, v_p \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad U_2 = \langle w_{p'+1}, \ldots, w_n \rangle_{\mathbb{R}}$$

Für $0 \neq u \in U_1$, $u = \sum_{i=1}^{p} x_i v_i$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\beta(u,u) = \sum_{i=1}^{p} \beta(v_i, v_i)\, x_i^2 = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 > 0, \text{ da}$$

mindestens ein $x_i \neq 0$. Analog, für $u \in U_2$,

$u = \sum_{i=p'+1}^{n} x_i w_i$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\beta(u,u) = \sum_{i=p'+1}^{n} \beta(w_i, w_i)\, x_i^2 = \sum_{i=p'+1}^{p'+q'} (-1)\, x_i^2 + \sum_{i=p'+q'+1}^{n} 0 \cdot x_i^2$$

$$= (-1) \sum_{i=p'+1}^{p'+q'} x_i^2 \leq 0.$$

Also folgt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und damit

$$\dim (U_1 + U_2) = \underbrace{\dim U_1}_{=p} + \underbrace{\dim U_2}_{=n-p'} - \underbrace{\dim (U_1 + U_2)}_{=0}$$

$$= n + p - p'$$

Linke Seite $\leq \dim V = n$, also $p - p' + n \leq n$

d.h. $p \leq p'$.

Völlig analog betrachte $W_1 := \langle w_1, \dots, w_{p'} \rangle_{\mathbb{R}}$

$W_2 := \langle v_{p+1}, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}}$.

Gleiches Argument:

$n + p' - p \leq n$, d.h. $p' \leq p$ also insgesamt $p = p'$.

$$\operatorname{Rang}(M_B(\beta)) = \operatorname{Rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix} \right) = p + q.$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{p} & \underbrace{\qquad}_{q} \end{array}$$

$$\operatorname{Rang}(M_C(\beta)) = \operatorname{Rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix} \right) = p' + q'.$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{p'} & \underbrace{\qquad}_{q'} \end{array}$$

Nach Satz 1.5 ist $M_C(\beta) = T^{t} \cdot M_B(\beta) \cdot T$

mit $T =$ Basiswechselmatrix.

Kapitel 3, §1: $\operatorname{Rang}(A \cdot B) \leq \operatorname{Rang}(A)$ und $\leq \operatorname{Rang}(B)$.

also $\operatorname{Rang}(M_C(\beta)) \leq \operatorname{Rang}(M_B(\beta))$.

T invertierbar $\Rightarrow$ $M_B(\beta) = (T^{t})^{-1} M_C(\beta)\, T^{-1}$

also auch $\operatorname{Rang}(M_B(\beta)) \leq \operatorname{Rang}(M_C(\beta))$.

Also $p + q = \operatorname{Rang}(M_B(\beta)) = \operatorname{Rang}(M_C(\beta)) = p' + q'$.

Wegen $p = p'$ folgt damit auch $q = q'$. $\square$.

Definition 3.2 Seien $p, q \geq 0$ wie oben. Wir definieren:

(a) $\beta \geq 0$ (β "positiv-semidefinit") wenn $q = 0$.

(b) $\beta > 0$ (β "positiv-definit") wenn $p = n$ und $q = 0$.

Analog: $\beta \leq 0$ wenn $p = 0$

$\beta < 0$ wenn $q = n$ und $p = 0$.

Satz 3.3 (a) $\beta \geq 0 \iff \beta(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$.

(b) $\beta > 0 \iff \beta(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$

und $\beta(v, v) = 0$ nur für $v = 0$.

(c) $\beta \geq 0$ und β nicht-ausgeartet $\Rightarrow \beta > 0$.

(Analoge Aussagen auch für $\beta \leq 0$, $\beta < 0$)

Beweis: Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis wie im Satz von Sylvester mit p-mal 1, q-mal -1 auf der Diagonalen von $M_B(\beta)$. Für $v \in V$ beliebig, $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ gilt dann:

$$(*) \quad \beta(v, v) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2.$$

(a) "$\Rightarrow$" $\beta \geq 0 \Rightarrow q = 0$ also $\beta(v, v) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \geq 0$

"$\Leftarrow$" Annahme $q \neq 0$. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $\beta(v_i, v_i) = -1$, Widerspruch zu $\beta(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$.

(b) "$\Rightarrow$" $\beta > 0 \Rightarrow \beta \geq 0 \overset{a)}{\Rightarrow} \beta(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$.

$p = n \Rightarrow 0 = \beta(v, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow$ alle $x_i = 0$

also $v = 0$.

"$\Leftarrow$" Mit (a) gilt bereits $\beta \geq 0$. Annahme: $p < n$.

$\Rightarrow \beta(v_n, v_n) = 0$ Widerspruch zur Annahme.

(c) Annahme $p < n$. $\Rightarrow \beta(v_n, v_n) = 0$.

Aber auch $\beta(v_i, v_n) = 0$ für $1 \leq i \leq n-1$.

$\Rightarrow$ $\beta(v, v_n) = 0$ für alle $v \in V$ (weil β linear im 1. Argument)

$\lightning$ zu β nicht-ausgeartet.

Folgerung 34 (Matrixversion) Sei C beliebige Basis von V und $A := M_C(\beta) \in M_n(\mathbb{R})$.

a) $\beta \geq 0 \Rightarrow \exists\, P \in M_n(\mathbb{R})$ mit $A = P^{tr} \cdot P$.

b) $\beta > 0 \Rightarrow \exists\, P \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar mit $A = P^{tr} \cdot P$

c) $\beta > 0 \Rightarrow \det(A) > 0$.

Beweis: Sei B Basis wie im Satz von Sylvester. T = Basiswechselmatrix, also

$$A = T^{tr} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}}_{=:D} T$$

with p ones and q minus ones.

a) $\beta \geq 0 \Rightarrow q = 0$, also $D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = D \cdot D$.

Setze $P := D \cdot T$. Dann

$$A = T^{tr} \cdot D \cdot T = T^{tr} \cdot D \cdot D\, T \underset{\substack{\uparrow \\ D \text{ diagonal}}}{=} T^{tr} D^{tr} \cdot D \cdot T = (DT)^{tr}\, DT = P^{tr}\, P. \checkmark$$

b) $\beta > 0 \Rightarrow D = I_n \Rightarrow P$ invertierbar.

c) $A = P^{tr} \cdot P$ wie in b) Dann $\det(A) = \det(P^{tr}) \cdot \det(P)$
$= \det(P)^2 > 0$, da $\det(P) \neq 0$, weil P invertierbar. $\square$

Beispiel 35 $V = \mathbb{R}^n$ $\beta: V \times V \to \mathbb{R}$
$(v, w) \mapsto v^{tr} \cdot w$

Standardbilinearform

$B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ Einheitsvektoren $M_B(\beta) = I_n$

also $p = n$, $q = 0$

β positiv-definit.

Allgemeiner: $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch.

$\beta_A: V \times V \to \mathbb{R}$ Schreibe $A \geq 0$ falls $\beta_A \geq 0$

$(v,w) \mapsto v^{tr} A w$ $A > 0$ falls $\beta_A > 0$

Werden im Folgenden hauptsächlich positiv-definite Bilinearformen betrachten.

Für Anwendungen sind auch andere sehr nützlich

z.B. $V = \mathbb{R}^4$ $\beta: V \times V \to \mathbb{R}$ mit $p = 3,\ q = 1$

Minkowski-Raum $\to$ Einsteins Relativitätstheorie

siehe z.B. das Buch von Huppert-Willems §7.5, 7.6.

<u>Satz 3.6</u> (Determinantenkriterium für positiv-Definitheit)

Sei $n = \dim V < \infty$, $\beta: V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, $B = \{v_1, .., v_n\}$ Basis von V und $G = M_B(\beta) = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Dann gilt:

β positiv-definit $\iff \det\left(\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & \cdots & g_{kk} \end{bmatrix}\right) > 0$

für $1 \leq k \leq n$.

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" Sei $1 \leq k \leq n$ und $U := \langle v_1, .., v_k \rangle_{\mathbb{R}}$.

Betrachte $\beta' := \beta|_{U \times U}: U \times U \to \mathbb{R}$ Einschränkung

wiederum symmetrische Bilinearform und natürlich

weiterhin $\beta'(u,u) = \beta(u,u) \geq 0$ für alle $u \in U$

$= 0$ nur für $u = 0$.

also β' positiv-definit.

$M_{B'}(\beta') = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & \cdots & g_{kk} \end{bmatrix}$ $\det(\ldots) > 0$ nach Folgerung 3.4(c).

$B' = \{v_1, .., v_k\}$

"$\Leftarrow$" Vollständige Induktion nach n. Ist $n = 1$, So $G = M_B(\beta) = [g_{11}]$ 1×1 - Matrix.

$\det(G) > 0 \Rightarrow g_{11} > 0$ also $p = 1, q = 0$.

β positiv-definit

Sei nun $n \geq 2$ und Behauptung bereits gezeigt für Vektorräume kleinerer Dimension. Sei $U = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\beta' := \beta|_{U \times U} : U \times U \to \mathbb{R}$ Einschränkung.

$B' = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ Basis von U mit Gram-Matrix $G' = M_{B'}(\beta') = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1\,n-1} \\ \vdots & & \\ g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$

Nach Induktion folgt $\beta' : U \times U \to \mathbb{R}$ positiv-definit.

Nach Trägheitssatz von Sylvester gibt es Basis $C = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ von U mit $M_C(\beta') = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$(p = n-1, q = 0)$

Beh.: $U \cap U^\perp = \{0\}$ denn sei $u \in U \cap U^\perp$ dann $0 = \beta'(u,u)$. Da β' positiv-definit, folgt $u = 0$. Satz 2.2: $V = U \oplus U^\perp$

Satz 2.1: $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = n - (n-1) = 1$.

also $U^\perp = \langle w_n \rangle$ mit $0 \neq w_n \in V$.

Wegen $w_n \in U^\perp$ folgt $\beta(w_i, w_n) = 0$ für $1 \leq i < n$.

Sei $d := \beta(w_n, w_n)$

Dann $M_{C'}(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & d \end{bmatrix}$

$C' := \{w_1, \dots, w_n\}$ Basis von V (denn $V = U + U^\perp = \langle w_1, \dots, w_n \rangle_{\mathbb{R}}$).

Sei $T \in M_n(\mathbb{R})$ Basiswechselmatrix zwischen B und C' also $M_{C'}(\beta) = T^{tr} \cdot M_B(\beta) \cdot T$.

Dann $d = \det(M_{C'}(\beta)) = \underbrace{\det(T)^2}_{>0} \underbrace{\det(M_B(\beta))}_{>0} > 0$

Ersetze w_n durch $w_n' = \sqrt{\lambda}^{-1} w_n$. Dann

$\{w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n'\}$ ONB von V, also $p = n$, $q = 0$

β positiv-definit. $\square$

Obiges Kriterium ist z.B. sehr nützlich in der Analysis.

<u>Satz 3.7</u> (Cauchy-Schwartz-Ungleichung).

Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ positiv-definit. Dann gilt

$$\beta(v,w)^2 \leq \beta(v,v) \cdot \beta(w,w) \quad \text{für alle } v, w \in V.$$
$$< \quad \text{falls } (v,w) \text{ linear unabhängig.}$$

<u>Beweis</u>: 1. Fall: (v,w) linear abhängig, also

$v = sw$ oder $w = sv$ mit einem $s \in \mathbb{R}$.

Sei $w = sv$. Dann $\beta(v,w) = \beta(v, sv) = s\beta(v,v)$.

$\beta(w,w) = s^2 \beta(v,v)$.

Also $\beta(v,w)^2 = s^2 \beta(v,v)^2 \stackrel{?}{=} \beta(w,w)\beta(v,v)$ ✓.

Genauso für $v = sw$.

2. Fall: (v,w) linear unabhängig. Betrachte

$U = \langle v,w \rangle_{\mathbb{R}}$ $\quad B = \{v,w\}$ Basis von V.

$\beta|_{U\times U} : U \times U \to \mathbb{R}$ weiterhin positiv-definit

$$M_B(\beta|_{U\times U}) = \begin{bmatrix} \beta(v,v) & \beta(v,w) \\ \beta(v,w) & \beta(w,w) \end{bmatrix}.$$

Folgerung 3.4(c) $\quad \det(M_B(\beta|_{U\times U})) > 0$

$$\overset{\shortparallel}{\beta(v,v)\beta(w,w) - \beta(v,w)^2} \qquad \square.$$

<u>Spezialfall</u> $\quad V = \mathbb{R}^n \quad \beta(v,w) = v^{tr} \cdot w$.

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \implies$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \beta(v,w)^2 \leq \beta(v,v)\beta(w,w) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Definition 3.8 Sei $\dim V < \infty$ und $\beta: V \times V \to \mathbb{R}$ positiv-definite symmetrische Bilinearform. Dann heißt β auch ein ~~[illegible]~~ Skalarprodukt und (V, β) Euklidischer Raum. Wir definieren dann eine Norm auf V durch $\|v\| := \sqrt{\beta(v,v)}$ für alle $v \in V$.
"Länge von v".

Standardbeispiel: $V = \mathbb{R}^n$ mit $\beta(v,w) = v^{tr} \cdot w$.

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \|v\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Bemerkung: (V, β) Euklidischer Raum und $U \leq V$ beliebiger Teilraum. Dann ist auch $(U, \beta|_{U \times U})$ Euklidischer Raum und $V = U \oplus U^\perp$

denn: $U \cap U^\perp = \{0\}$ (sei $u \in U \cap U^\perp$ dann $\beta(u,u) = 0$ also $u = 0$)
+ Satz 2.2.

Im Trägheitssatz von Sylvester ist $p = \dim V$, $q = 0$ also gibt es immer eine Orthonormalbasis.

Satz 3.9 Sei (V, β) Euklidischer Raum.

(a) $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$ nur für $v = 0$

(b) $\|sv\| = |s| \, \|v\|$ für $s \in \mathbb{R}$, $v \in V$
Absolutbetrag

(c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$
"Dreiecksungleichung"

(d) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff v \perp w$.

Beweis: (a) klar weil β positiv-definit

(b) $\|sv\| = \sqrt{\beta(sv, sv)} = \sqrt{s^2 \beta(v,v)} = \sqrt{s^2} \cdot \sqrt{\beta(v,v)} = |s| \cdot \|v\|$.

(c) $\|v + w\|^2 = \beta(v+w, v+w) = \beta(v,v) + 2\beta(v,w) + \beta(w,w)$

$$\le \quad \|v\|^2 + 2\sqrt{\beta(v,v)}\sqrt{\beta(w,w)} + \|w\|^2$$

Cauchy-Schwarz
$$= \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| \cdot \|w\|^2 = (\|v\|+\|w\|)^2$$

(d). $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\beta(v,w) + \|w\|^2$ siehe oben.

Also $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff \beta(v,w) = 0$
$\iff v \perp w.$ □

Bemerkung 3.10 (V,β) Euklidischer Raum

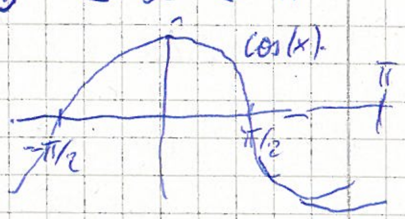
Cauchy-Schwarz   Seien $v,w \in V$, $v \neq 0$, $w \neq 0$

$$\beta(v,w)^2 \le \|v\|^2\,\|w\|^2 \Rightarrow -\|v\|\cdot\|w\| \le \beta(v,w) \le \|v\|\cdot\|w\|$$

$$\Rightarrow \quad -1 \le \frac{\beta(v,w)}{\|v\|\cdot\|w\|} \le 1$$

Also gibt es genau ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \le \alpha \le \pi$

mit $\cos(\alpha) = \dfrac{\beta(v,w)}{\|v\|\cdot\|w\|}$



$\alpha = \sphericalangle(v,w)$ heißt Winkel zwischen v und w.

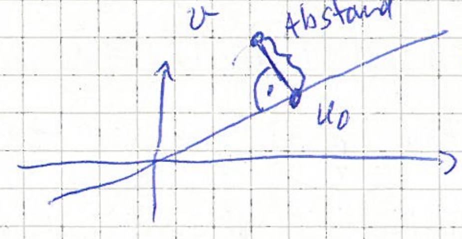
Jetzt einige Anwendungen.

Satz 3.11 Sei (V,β) Euklidischer Raum, $U \le V$ Teilraum und $v \in V$ beliebig. Dann gibt es genau ein $u_0 \in U$ mit
$$\|v - u_0\| \le \|v - u\| \text{ für alle } u \in U.$$

Also $\|v - u_0\| = \min\{\|v-u\| \mid u \in U\}$.

"Abstand von v zu U"

Beispiel in $\mathbb{R}^2$



U = Gerade durch Ursprung (δ).

Beweis: Bemerkung zu Def. 3.8: $V = U \oplus U^\perp$.

Schreibe $v = u_0 + u'$ mit $u_0 \in U$, $u' \in U^\perp$.

Dann gilt für $u \in U$ beliebig:

$$\|v-u\|^2 = \|v-u_0+u_0-u\|^2 = \|\underbrace{u'}_{\in U^\perp} + \underbrace{u_0-u}_{\in U}\|^2$$

$$\underset{\text{Satz 3.9(d)}}{=} \|u'\|^2 + \|u_0-u\|^2$$

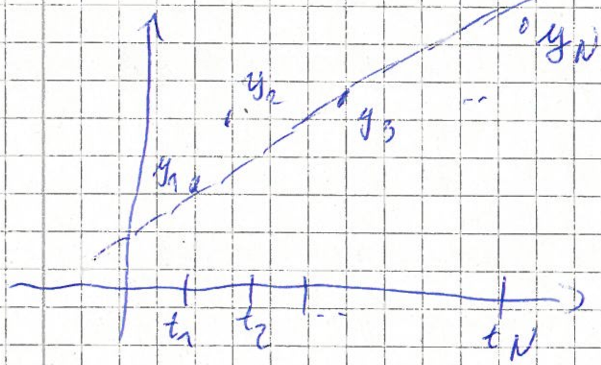
$$= \|v-u_0\|^2 + \|u_0-u\|^2 > \|v-u_0\|^2$$

für alle $u \in U$ mit $u \neq u_0$.

Also $\|v-u\| > \|v-u_0\|$ für alle $u_0 \neq u \in U$ □

<u>Beispiel 3.12</u> (Gauß' Methode der kleinsten Quadrate).

Gegeben seien Messwerte (t_i, y_i) für $1 \leq i \leq N$, wobei $t_1, \dots, t_N$ Zeitpunkte angibt (z.B.) und y_i die zu t_i erhobenen Werte sind. Gesucht: Gerade $y = at+b$, die möglichst nahe an diesen Punkten vorbeiläuft.



Also: suche $a, b \in \mathbb{R}$, so daß der Fehler

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (at_i+b))^2$$

möglichst klein wird.

Betrachte lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^N, \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} at_1+b \\ at_2+b \\ \vdots \\ at_N+b \end{bmatrix}.$$

Setze $U := \text{Bild}(\varphi) \leq \mathbb{R}^N$

Betrachte $\mathbb{R}^N$ als Euklidischen Raum mit Standardskalarprodukt. Dann suchen wir $a, b \in \mathbb{R}$ so daß

$$F(a,b) = \|\varphi(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) - y\|^2 \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

möglichst klein wird.

Sei $u_0 \in U$ wie in Satz 3.11 und $a, b \in \mathbb{R}$ so daß $\varphi([\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}]) = u_0$. Dann

$$\|u_0 - y\| \leq \|u - y\| \text{ für alle } u \in U.$$

also Lösung des Problems. Beispiele in den Übungen. □

Zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Betrachte lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$

Lösbar $\iff$ $\text{Rang}([A|b]) = \text{Rang}(A)$

$\iff$ $b \in SR(A)$ = Spaltenraum von A.

$N(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0_m\}$ Lösungsraum des homogenen System. Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine spezielle Lösung von $Ax = b$, so erhält man alle Lösungen als $x_0 + x'$ mit $x' \in N(A)$ [siehe Kapitel 3, Satz 1.6].

Frage: Gibt es immer eine ausgezeichnete spezielle Lösung $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

Antwort: Ja, denn:

Satz 3.13 Sei $L := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \neq \emptyset$ das Gleichungssystem also lösbar. Dann gibt es genau ein $x_0 \in L$ mit minimaler Länge, d.h. $\|x_0\| < \|x\|$ für alle $x \in L$, $x \neq x_0$

Beweis: Betrachte $\mathbb{R}^n$ als Euklidischen Raum mit Standard-Skalarprodukt. Dann $\mathbb{R}^n = N(A) \oplus N(A)^\perp$. Sei $x_1 \in L$ beliebig und schreibe $x_1 = u + x_0$ mit $u \in N(A)$

und $x_0 \in N(A)^\perp$. Dann $Ax_0 = A(x_1 - u)$
$= Ax_1 - Au = b$ also $x_0 \in L$.

Sei $x \in L$ beliebig. Dann $x = x_0 + y$ mit $y \in N(A)$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \|\underset{N(A)^\perp}{x_0} + \underset{N(A)}{y}\|^2 = \|x_0\|^2 + \|y\|^2 > \|x_0\|^2 \text{ falls } y \neq 0$$

Also x_0 eindeutige Lösung minimaler Länge $\square$

Beispiele in den Übungen.

<u>Beispiel 3.14</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beliebig.

Wollen nun Pseudo-Inverse definieren (siehe Übungs-Blatt 15, LAAG 1)

Betrachte $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ als Euklidische Räume jeweils mit Standardskalarprodukt. Sei $U := SR(A) \leq \mathbb{R}^m$ Spaltenraum von A.

Für $1 \leq j \leq m$ sei $e_j \in \mathbb{R}^m$ Einheitsvektor.

Satz 3.11: Es gibt genau ein $b_j \in U$ mit

$$\|e_j - b_j\| = \min\{\|e_j - u\| \mid u \in U\}.$$

Betrachte dann lineares Gleichungssystem $Ax = b_j$.
Dies ist lösbar weil $b_j \in U = SR(A)$.

Sei $a_j^+ \in \mathbb{R}^n$ eindeutige Lösung minimaler Länge wie in Satz 3.13.

Definiere neue Matrix $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit Spalten gegeben durch $a_1^+, \dots, a_m^+$.

(Ü) Zeige, daß die Eigenschaften in Blatt 15, Aufgabe 5 für A^+ gelten. A^+ ist sogar die eindeutig bestimmte Moore-Penrose-Inverse.

§4 Der Spektralsatz Sei (V, β) ein Euklidischer Raum.

Eine lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ heißt orthogonale Abbildung, wenn φ Abstände erhält, d.h. es gilt
$$\|\varphi(v)\| = \|v\| \quad \text{für alle } v \in V.$$

Satz 4.1 Sei $\varphi: V \to V$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) φ ist orthogonal.

(2) Es gilt $\beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v, w)$ für alle $v, w \in V$.

(3) Es gilt $\varphi^* \circ \varphi = id_V$, wobei $\varphi^*: V \to V$ adjungierte Abbildung wie in Satz 1.8.

Beweis: "(1) ⇒ (2)" Sei $q(v) := \beta(v, v)$ für $v \in V$.
Für $v, w \in V$ gilt:
$$q(v+w) = \beta(v+w, v+w) = q(v) + 2\beta(v, w) + q(w)$$
also $$\beta(v, w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right)$$
Damit folgt:
$$\beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \frac{1}{2}\left(q(\varphi(v)+\varphi(w)) - q(\varphi(v)) - q(\varphi(w))\right)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{q(\varphi(v+w))}_{= q(v+w)} - \underbrace{q(\varphi(v))}_{= q(v)} - \underbrace{q(\varphi(w))}_{= q(w)}\Big) \quad \text{nach Vor. (1)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right) = \beta(v, w) \quad ✓.$$

"(2) ⇒ (3)" $\beta(\varphi(v), w) = \beta(v, \varphi^*(w))$ für alle $v, w \in V$.
Also $\beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v, \varphi^*(\varphi(w)))$ für alle $v, w \in V$
$\overset{"}{\beta(v,w)}$ Daraus folgt mit festem $w \in V$:
$$\beta(v, \varphi^*(\varphi(w)) - w) = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Weil β nicht ausgeartet ist, folgt also

$\varphi^*(\varphi(w)) = 0$ Dies gilt für alle $w \in W$,

also $\varphi^* \circ \varphi = id_V$.

"(3) ⇒ (1)" $\beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v, \varphi^*(\varphi(w)))$

$= \beta(v, \underbrace{(\varphi^* \circ \varphi)}_{= id_V \text{ nach Vor.}}(w)) = \beta(v, w)$ für alle $v, w \in W$.

also auch $\|\varphi(v)\|^2 = \beta(\varphi(v), \varphi(v)) = \beta(v, v) = \|v\|^2$

□.

<u>Bemerkung 4.2</u> Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V

$A = M_B(\varphi) \in M_n(\mathbb{R})$ darstellende Matrix von $\varphi: V \to V$. Sei $G = M_B(\beta)$ Gram-Matrix von β.

Beweis von Satz 1.8: $M_B(\varphi^*) = G^{-1} A^{tr} G$.

Also φ orthogonal $\Leftrightarrow$ $\varphi^* \circ \varphi = id_V$.

$\Leftrightarrow$ $M_B(\varphi^*) \cdot M_B(\varphi) = I_n \Leftrightarrow G^{-1} A^{tr} G A = I_n$.

$\Leftrightarrow$ $A^{tr} G A = G$.

Ist B Orthonormalbasis von V, so $G = I_n$

und damit φ orthogonal $\Leftrightarrow$ $A^{tr} A = I_n$

$\Leftrightarrow$ A invertierbar und $A^{-1} = A^{tr}$.

Eine solche Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heißt "orthogonale Matrix".

<u>Beachte</u> $A \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonal $\Leftrightarrow$

Spalten von A bilden Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bzgl. Standardskalarprodukt.

<u>Denn</u>: Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ die Spalten von A.

$\underbrace{v_i^{tr} \cdot v_j}_{\text{Standardskalarprodukt}} = (A^{tr} A)_{ij}$ Also $A^{tr} A = I_n$

$\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ ONB

□.

Hauptsatz 4.3 (Spektralsatz, Matrixversion)

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrische Matrix, also $A^{tr} = A$. Dann ist A diagonalisierbar. Es gibt eine orthogonale Matrix $T \in M_n(\mathbb{R})$ mit

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} \quad d_i \in \mathbb{R}.$$

Beweis benötigt einige Vorbereitungen. Beachte: Zunächst ist gar nicht klar, ob es überhaupt einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt !

Betrachte $V = \mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt $\beta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und Norm $\|v\| = \sqrt{\beta(v,v)}$

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \to \quad \|v\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Für Matrix $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ definiere analog

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

~~Bemerkung~~ Lemma 4.4 Für $A \in M_n(\mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|A \cdot v\| \leq \|A\| \cdot \|v\|.$$

Beweis: $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\quad Av = w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ mit

$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Damit $\|Av\|^2 =$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big)^2 \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big) \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \Big)}_{= \|v\|^2} = \|v\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \|v\|^2 \cdot \|A\|^2.$$

Also auch $\|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$ $\square$

Bemerkung 4.5 Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^n$.

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ Dann gilt $|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$
$= \|v\|$ für jedes i.

und damit $\underbrace{|v^{tr} A v|}_{\in \mathbb{R}} = \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \right|$ (↑ Absolutbetrag)

$\leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \, |x_i| \, |x_j| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \, \|v\|^2$

(↑ Dreiecksungleichung für reelle Zahlen)

$= \|v\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{|a_{ij}|}_{\leq \|A\|} \leq n^2 \|A\| \cdot \|v\|^2.$

Also

$S(A) := \{ v^{tr} A v \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1 \} \subseteq \mathbb{R}$

beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Es gilt:

$-n^2 \cdot \|A\| \leq v^{tr} A v \leq n^2 \|A\|$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$.

Nach Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$ gibt es eine größte untere Schranke

$\mu(A) := \inf(S(A)) \in \mathbb{R}$.

Es folgt $(*)$ $v^{tr} A v \geq \mu(A) \|v\|^2$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Bew: Ist $v = 0$, so ist $(*)$ klar. Sei nun $v \neq 0$.

So setze $w := \|v\|^{-1} v$. Dann $\|w\| = 1$,

also $w^{tr} A w \geq \mu(A)$ und damit $v^{tr} A v \geq \mu(A) \|v\|^2$. □

Satz 4.6 Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann ist $\mu(A) \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A.

Beweis: Sei $B := A - \mu(A) I_n \in M_n(\mathbb{R})$ ebenfalls symmetrisch. Ist $\det(B) = 0$, so $\mu(A)$ Eigenwert, also fertig. Annahme $\det(B) \neq 0$.

Nun ist $v^{tr} B v = v^{tr} (A - \mu(A) I_n) v =$

$v^{tr} A v - \mu(A)\, v^{tr} v = v^{tr} A v - \mu(A)\, \|v\|^2 \geq 0$
nach Bemerkung 4.5 (*).

$\beta_B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto v^{tr} B w$
symmetrische Bilinearform. Obige Rechnung: $\beta_B(v, v) \geq 0$
für alle $v \in \mathbb{R}^n$, also $\beta_B \geq 0$ positive-semidefinit.
Aber auch $\det(B) \neq 0$, also $\beta_B > 0$ positive-definit
(siehe Satz 3.3(c)).

Folgerung 3.4(b): es gibt eine invertierbare Matrix
$P \in M_n(\mathbb{R})$ mit $B = P^{tr} \cdot P$.

Sei nun $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$.
$v^{tr} B v = v^{tr} P^{tr} P v = (Pv)^{tr} Pv = \|Pv\|^2$
und $1 = \|v\| = \|P^{-1}(Pv)\| \underset{\text{Lemma 4.4}}{\leq} \|P^{-1}\|\, \|Pv\|$

Also $v^{tr} B v = \|Pv\|^2 \geq 1/\|P^{-1}\|^2 =: C > 0$.

Damit ist C eine untere Schranke für $S(B)$.

Schließlich: $v^{tr} A v = v^{tr}(B + \mu(A) I_n)\, v$

$= v^{tr} B v + \mu(A) v^{tr} v \geq C + \mu(A)\, \|v\|^2 = C + \mu(A)$
für alle $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$.

Also $C + \mu(A)$ untere Schranke für $S(A)$.
Aber $\mu(A)$ größte untere Schranke, also
$C + \mu(A) \leq \mu(A) \Rightarrow C < 0$
Widerspruch $\square$.

<u>Hauptsatz 4.7</u> (Spektralsatz) Sei (V, β) ein Euklidischer Raum und $\varphi : V \to V$ lineare Abbildung mit $\varphi^* = \varphi$ ("selbst-adjungiert"). Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von φ besteht.

__Bemerkung 4.8__ Aus Hauptsatz 4.7 folgt die Matrixversion in Hauptsatz 4.3. Denn sei $V = \mathbb{R}^n$ mit β = Standardskalarprodukt.
$B = \{e_1, \dots, e_n\}$ Basis der Einheitsvektoren.
$\varphi : V \to V$ linear mit $M_B(\varphi) = A$.
B ONB $\Rightarrow$ $M_B(\varphi^*) = A^{tr}$. Also $\varphi = \varphi^*$ genau dann wenn $A^{tr} = A$. Sei dies der Fall. Dann gibt es nach Hauptsatz 4.7 eine Orthonormalbasis $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V, so daß jedes v_i ein Eigenvektor von φ ist, also

$$\varphi(v_i) = d_i v_i \quad \text{mit } d_i \in \mathbb{R}$$

Dann $$M_C(\varphi) = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}.$$

Sei $T \in M_n(\mathbb{R})$ Basiswechselmatrix. Dann

$$M_C(\varphi) = T^{-1} M_B(\varphi) T = T^{-1} A T.$$

Spalten von T sind die neuen Basisvektoren $v_1, \dots, v_n$ $\left(T = M_B^C(id_{\mathbb{R}^n}) \right)$.
Weil C ONB, folgt daß T eine orthogonale Matrix ist, siehe Bemerkung 4.2.

__Jetzt Beweis von Hauptsatz 4.7__ Sei $n = \dim V$.
Vollständige Induktion nach n. Ist $n = 1$, so ist nichts zu zeigen. Sei nun $n \geq 2$ und Behauptung bereits bewiesen für Vektorräume echt kleinerer Dimension.

Sei C eine Orthonormalbasis von V und $A = M_C(\varphi) \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi = \varphi^* \Rightarrow A^{tr} = A$ symmetrisch.
(siehe Satz 1.8).

Nach Satz 4.6 hat A einen Eigenwert $d_1 \in \mathbb{R}$.
Also ist d_1 auch Eigenwert von φ.

Sei $w_1 \in V$ zug. Eigenvektor, also $w_1 \neq 0$ und $\varphi(w_1) = \lambda_1 w_1$. Setze $v_1 := \|w_1\|^{-1} w_1$.

Dann ist auch v_1 Eigenvektor und $\|v_1\| = 1$.

Sei $U := \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$. Dann $V = U \oplus U^\perp$

und $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = n - 1$.

Einschränkung von β auf $U^\perp$ ist weiterhin positiv-definit, also $(U^\perp, \beta|_{U^\perp \times U^\perp})$ Euklidischer Raum.

<u>Beh:</u> $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$

<u>Dazu:</u> Sei $u \in U^\perp$. Dann

$$\beta(\varphi(u), v_1) = \beta(u, \varphi^*(v_1))$$

$$= \beta(u, \varphi(v_1)) = \beta(u, \lambda_1 v_1) = \lambda_1 \underbrace{\beta(u, v_1)}_{=0,\text{ weil } u \perp v_1} = 0.$$

Also $\varphi(u) \perp v_1$ und damit

$\varphi(u) \in U^\perp$ □.

Sei $\psi := \varphi|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$ Einschränkung von φ.

Dann ist auch ψ selbst-adjungiert, denn für alle $u, u' \in U^\perp$ gilt:

$$\beta(\psi(u), u') = \beta(\varphi(u), u') = \beta(u, \varphi^*(u'))$$

$$= \beta(u, \varphi(u')) = \beta(u, \psi(u')) \quad \text{also } \psi = \psi^*.$$

Nach Induktion gibt es eine Orthonormalbasis $\{v_2, \dots, v_n\}$ von $U^\perp$, so daß jedes v_i Eigenvektor von ψ. Also $\underset{\varphi(v_i)}{\overset{\shortparallel}{\psi(v_i)}} = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \geq 2$.

Also $\{v_1, \dots, v_n\}$ Eigenvektoren von φ.

$V = U + U^\perp = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}}$ also $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V.

$\beta(v_1, v_i) = 0$ für $i \geq 2$

Also $\{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalbasis von V □.

Beispiel 4.9 Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ symmetrisch.

$$\chi_A = \det(A - X I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} a-X & b \\ b & c-X \end{bmatrix}\right) = (a-X)(c-X) - b^2$$

$$= X^2 - (a+c)X + ac - b^2$$

Nullstellen $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a+c) \pm \sqrt{\underbrace{b^2 + \frac{1}{4}(a-c)^2}_{\geq 0}}$ also reelle Nullstellen!

Bemerkung 4.10 Für den Spektralsatz ist es wesentlich, daß der Grundkörper $\mathbb{R}$ ist. Ansonsten gibt es Gegenbeispiele, bereits für $\dim V = n = 2$ bzw. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M_2(K)$ symmetrisch.

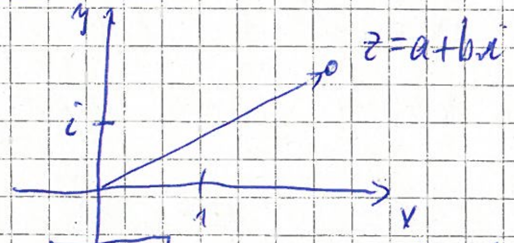
(a) $K = \mathbb{Q}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ keine Eigenwerte in $\mathbb{Q}$.

(b) $K = \mathbb{C}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ nicht diagonalisierbar

(c) $K = \mathbb{F}_2$ $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nicht diagonalisierbar.

§5 Der Spektralsatz über $\mathbb{C}$

Abstand in $\mathbb{C}$



Norm von z gegeben durch $\|z\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ $\quad \bar{z}$ = konjugiert komplexe Zahl.

Dies legt es nahe, wie folgt eine Abbildung zu definieren

$$\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\right) \mapsto \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$$

Dann $\beta\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{u_i \bar{u}_i}_{\in \mathbb{R}_{\geq 0}} \in \mathbb{R}$ und ≥ 0.

können also wieder $\left\|\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\right\| := \sqrt{\beta\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\right)}$ als "Norm" definieren.

<u>Def. 5.1</u> Sei V Vektorraum über $\mathbb{C}$.
Eine Abbildung $\beta: V \times V \to \mathbb{C}$ heißt Sesquilinearform, wenn gilt:

(a) β ist linear im 1. Argument, also

$$\beta(sv + tv', w) = s\,\beta(v, w) + t\,\beta(v', w) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{C},\ v, v', w \in V$$

(b) β ist semi-linear im 2. Argument, d.h.

$$\beta(v, sw + tw') = \bar{s}\,\beta(v, w) + \bar{t}\,\beta(v, w') \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{C} \quad v, w, w' \in V$$

Eine Sesquilinearform β heißt Hermite'sche Form wenn zusätzlich gilt $\beta(v, w) = \overline{\beta(w, v)}$ für alle $v, w \in V$.

In diesem Fall ist also $\beta(v, v) = \overline{\beta(v, v)} \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.

Eine Hermite'sche Form β heißt positiv-definit wenn $\beta(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$ gilt, mit $\beta(v, v) = 0$ nur für $v = 0$.

Ein <u>unitärer Raum</u> ist dann ein Paar (V, β) mit
- V Vektorraum über $\mathbb{C}$
- β positiv-definite Hermite'sche Form.

<u>Standardbeispiel</u>: $V = \mathbb{C}^n$ mit

$$\beta\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} \quad \text{wie oben.}$$

Werden nun sehen, daß man Theorie aus §3 und §4 auf diese Situation übertragen kann.

Bemerkung 5.2 Sei $n = \dim V < \infty$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ Sesquilinearform. Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V. $M_B(\beta) := [\beta(v_i, v_j)]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ heißt dann wiederum Gram-Matrix von β bzgl. B.

(a) Seien $v, w \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v$ und $w = \sum_{i=1}^{n} y_i w_i$ mit $x_i, y_i \in \mathbb{C}$. Dann

$$\beta(v, w) = [x_1, \ldots, x_n] \cdot M_B(\beta) \cdot \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix}$$

(analoge Rechnung wie in Satz 1.4.)

(b) Sei $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ weitere Basis und $T = [t_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ Basiswechselmatrix, also

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \, v_i \quad \text{für } 1 \leq j \leq n.$$

Dann gilt $M_C(\beta) = T^{tr} \cdot M_B(\beta) \cdot \overline{T}$

wobei $\overline{T} := [\overline{t_{ij}}]$ (Analoge Rechnung wie in Satz 1.5).

(c) β Hermite'sch (also $\beta(v, w) = \overline{\beta(w, v)}$ für alle $v, w \in V$) genau dann, wenn $\overline{M_B(\beta)} = M_B(\beta)^{tr}$

(analog wie in Satz 1.4).

Def. 5.3 Sei $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ beliebig. Setze $\overline{A} := [\overline{a_{ij}}] \in M_n(\mathbb{C})$. Dann heißt $A^* := \overline{A}^{tr} \in M_n(\mathbb{C})$ die zu A adjungierte Matrix. A heißt Hermite'sch, wenn $A^* = A$ gilt. Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$: A Hermitesch $\Leftrightarrow$ A symmetrisch.

Satz 5.4 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung).

Sei V $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\beta: V \times V \to \mathbb{C}$ positiv-definite Hermite'sche Form. Sei $n \geq 1$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängige Folge in V. Dann gibt es eine lineare unabhängige Folge mit:

(a) $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle_{\mathbb{C}} = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle_{\mathbb{C}}$ für $1 \leq k \leq n$

(b) $\beta(w_i, w_i) > 0$ und $\beta(w_i, w_j) = 0$ für $i \neq j$.

(c) $w_1 := v_1$.

$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta(v_k, w_i)}{\beta(w_i, w_i)} w_i \quad \text{für } k = 2, \ldots, n.$$

Beweis: völlig analog zu Satz 2.7.

Beachte für $1 \leq k < n$ ist

$$\beta(w_k, w_n) = \beta\Big(w_k, \overline{v_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta(v_k, w_i)}{\beta(w_i, w_i)}} w_i\Big)$$

$$= \beta(w_k, v_n) - \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\beta(v_n, w_i)}{\beta(w_i, w_i)}} \underbrace{\beta(w_k, w_i)}_{=0 \text{ für } i \neq k}$$

$$= \beta(w_k, v_n) - \overline{\frac{\beta(v_n, w_k)}{\beta(w_k, w_k)}} \beta(w_k, w_k).$$

Nun $\beta(w_k, w_k) = \overline{\beta(w_k, w_k)} \in \mathbb{R}$

und $\overline{\beta(v_n, w_k)} = \beta(w_k, v_n)$ wegen Hermitesch.

also Ergebnis $= 0$ $\square$

Folgerung 5.5

(V, β) unitärer Raum, $n = \dim V < \infty$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

also $\beta(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$

Beweis: Satz 5.4 gibt es eine Basis

$\{w_1, \ldots, w_n\}$ mit $\beta(w_i, w_j) = 0$ für $i \neq j$.
$d_i := \beta(w_i, w_i) > 0$ wegen positiv-definit.
Setze $v_i := \sqrt{d_i}^{-1} w_i$ für $1 \leq i \leq n$. Dann
$\beta(v_i, v_i) = d_i^{-1} \beta(w_i, w_i) = 1$, also $\{v_1, \ldots, v_n\}$
Orthonormalbasis. □

Def. 5.6 Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dann heißt A "unitär", wenn $A \cdot A^* = I_n$ gilt, also A invertierbar und $A^{-1} = A^*$.

[Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$, so: A unitär $\Leftrightarrow$ A orthogonal
siehe Bem. 4.2]

A heißt "normal", wenn $A \cdot A^* = A^* \cdot A$ gilt.

Also z.B.: A unitär $\Rightarrow$ A normal
A hermitesch $\Rightarrow$ A normal.

Lemma 5.7 Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ normal. Dann gilt
$$\|Av\| = \|A^* v\| \text{ für alle } v \in \mathbb{C}^n$$
(wobei $\|\cdot\|$ bzgl. Standard-Produkt auf $\mathbb{C}^n$)

Beweis: $\beta: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ Standardprodukt,
also $\beta(v, w) = v^{tr} \cdot \overline{w}$ für $v, w \in \mathbb{C}^n$.
$$= [x_1, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{bmatrix} \quad \text{für } v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \qquad \|v\| = \sqrt{\beta(v,v)}$$
$$\|Av\|^2 = \beta(Av, Av) = (Av)^{tr} \cdot \overline{Av} = v^{tr} A^{tr} \overline{A} \, \overline{v}$$
Nun $A^{tr} \overline{A} = \overline{A}^{tr} \cdot A \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ normal}}}{=} A \cdot \overline{A}^{tr} = \overline{A} \cdot A^{tr}$.

Also $\|Av\|^2 = v^{tr} \overline{A} \cdot A^{tr} \overline{v}$. Andererseits:
$$\|A^* v\|^2 = \beta(A^* v, A^* v) = (A^* v)^{tr} \cdot \overline{A^* v} = v^{tr} A^{*tr} \cdot \overline{A^*} \, \overline{v}$$
$$= v^{tr} \overline{A} \cdot A^{tr} \overline{v} = \|Av\|^2 \text{ siehe oben.} \quad □$$

Wir benötigen noch eine weitere Aussage, die wir erst im nächsten Kapitel beweisen (und näher behandeln)

Satz 5.8 Sei V $\mathbb{C}$-Vektorraum, $n = \dim V < \infty$ und $\varphi: V \to V$ linear. Dann gibt es eine Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit
$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix}$$
(obere Dreiecksmatrix)

Beweis: siehe Kapitel 6.

Hauptsatz 5.9 (Spektralsatz über $\mathbb{C}$, Matrixversion).
Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ beliebige Matrix. Dann gilt

(a) Es gibt eine unitäre Matrix $U \in M_n(\mathbb{C})$ mit
$$U^{-1} A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{(obere Dreiecksmatrix)}$$

(b) Ist A normal, also $AA^* = A^*A$, und U wie in (a), so ist
$$U^{-1} A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$$
Insbesondere: A diagonalisierbar.

Beweis: Sei $V = \mathbb{C}^n$ Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (e_i Einheitsvektoren) und $\beta: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ Standardprodukt. Dann $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ Orthonormalbasis von V. Sei $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineare Abbildung mit Matrix A, also $\varphi(v) = Av$ für alle $v \in V$. Nach Satz 5.8 gibt es Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V mit
$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Sei $P = M^B_E(\mathrm{id}_V) \in M_n(\mathbb{C})$ Basiswechselmatrix

Also $P^{-1}AP = M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Wende Gram-Schmidt auf $(v_1, \dots, v_n)$ an, erhalte neue Basis $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ von V mit

$\beta(w_i, w_j) = 0$ für $i \neq j$, $\quad d_i := \beta(w_i, w_i) > 0$

Nach Konstruktion $\quad w_1 = v_1$

und $\quad w_k = v_k +$ Linearkomb. von $v_1, \dots, v_{k-1}$ für $2 \leq k \leq n$.

Also $M^C_B(\mathrm{id}_V) = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} =: Q$ Basiswechselmatrix.

Damit

$$M_C(\varphi) = Q^{-1} M_B(\varphi) Q$$

Q obere Dreiecksmatrix mit 1 auf Diagonale $\Rightarrow$ Q^{-1} obere Dreiecksmatrix mit 1 auf Diagonale.

Produkt von oberen Dreiecksmatrizen ist wieder obere Dreiecksmatrix, also $M_C(\varphi) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Schließlich $C' := \{w_1', \dots, w_n'\}$ mit $w_i' := \sqrt{d_i}^{-1} w_i$.

Dann ist C' Orthonormalbasis von V

$M^{C'}_C(\mathrm{id}) = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n}^{-1} \end{bmatrix}$ Diagonalmatrix

Also $M_{C'}(\varphi) = M^{C'}_C(\mathrm{id})^{-1} M_C(\varphi) M^{C'}_C(\mathrm{id}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$

Sei $U := M^{C'}_E(\mathrm{id}_V)$ Basiswechselmatrix. Dann

$M_{C'}(\varphi) = U^{-1} M_E(\varphi) U = U^{-1} A U$

$\uparrow$ obere Dreiecksmatrix mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ auf Diagonalen.

$U =$ Basiswechselmatrix zwischen zwei Orthonormalbasen von V. Gleiches Argument wie in Bem. 4.2

$\Rightarrow$ U unitär. Damit (a) gezeigt.

Jetzt zu b) Setze $B := U^{-1} A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ wie in (a).

$A^* = \overline{A}^{tr}$.

$\Rightarrow B^* = (U^{-1} A U)^* = (\overline{U}^{-1} \overline{A} \overline{U})^{tr} = \overline{U}^{tr} \overline{A}^{tr} (\overline{U}^{-1})^{tr}$

U unitär, also $U^{-1} = \overline{U}^{tr}$ $\qquad = U^{-1} A^* U.$

<u>Beh.</u>: A normal $\Rightarrow$ B normal

denn: $B \cdot B^* = (U^{-1} A \cdot U)(U^{-1} A^* U) = U^{-1} A A^* U$

$= U^{-1} A^* A U = U^{-1} A^* U U^{-1} A U = B^* B$ ✓.

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & b_{n-1,n} \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & & 0 \\ \overline{b_{12}} & \overline{\lambda_2} & & \\ \vdots & \overline{b_{23}} & \ddots & \\ \overline{b_{1n}} & \overline{b_{2n}} & & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

<u>Lemma 5.7</u> $\|Be_1\| = \|B^* e_1\|$

Be_1: 1. Spalte von B $\qquad$ $B^* e_1$: 1. Spalte von B^*.

also $\lambda_1 \overline{\lambda_1} = \overline{\lambda_1} \lambda_1 + \overline{b_{12}} b_{12} + \ldots + \overline{b_{1n}} b_{1n}$

$\Rightarrow |b_{12}|^2 + \ldots + |b_{1n}|^2 = 0 \Rightarrow b_{12} = \ldots = b_{1n} = 0$

Dann betrachte $\|Be_2\| = \|B^* e_2\|$ (2. Spalte)

$\underbrace{b_{12} \overline{b_{12}}}_{=0} + \lambda_2 \overline{\lambda_2} = \overline{\lambda_2} \lambda_2 + \overline{b_{23}} b_{23} + \ldots + \overline{b_{2n}} b_{2n}$

$\Rightarrow |b_{23}|^2 + \ldots + |b_{2n}|^2 = 0 \Rightarrow b_{23} = \ldots = b_{2n} = 0$

usw mit 3. Spalte, ..., n. Spalte $\Rightarrow b_{ij} = 0$ für alle $1 \le i < j \le n$.

Also $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ Diagonalmatrix $\square$

<u>Bemerkung 5.10</u> $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitesch $\Rightarrow$ A normal.

Dann folgt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ in Hauptsatz 5.9.

Dies kann man benutzen, um Spektralsatz über $\mathbb{R}$ aus Spektralsatz über $\mathbb{C}$ herzuleiten $\rightarrow$ Ü