13. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Aufgabe 1. (V) Seien V_1, V_2 Vektorräume über einem Körper K. Weiterhin gegeben seien lineare Abbildungen $\varphi_1 \colon V_1 \to V_1$ und $\varphi_2 \colon V_2 \to V_2$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi \colon V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$, $(v, w) \mapsto \varphi_1(v) \otimes \varphi_2(w)$, bilinear ist.

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts gibt es also eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi} \colon V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$ mit $\tilde{\varphi}(v \otimes w) = \varphi_1(v) \otimes \varphi_2(w)$ für alle $v \in V_1$ und $w \in V_2$.

(b) Sei $n = \dim V_1 < \infty$ und $m = \dim V_2 < \infty$. Sei $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V_1 und $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von V_2. Nach Vorlesung ist also

$$B := \{v_i \otimes w_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

eine Basis von $V_1 \otimes V_2$. Bestimmen Sie $M_B(\tilde{\varphi})$, wobei die Basisvektoren in B wie folgt angeordnet seien:

$$v_1 \otimes w_1, \dots, v_1 \otimes w_m, v_2 \otimes w_1, \dots, v_2 \otimes w_m, \dots, v_n \otimes w_1, \dots, v_n \otimes w_m.$$

Wie sieht die darstellende Matrix aus, wenn die Basisvektoren in B wie folgt angeordnet werden?

$$v_1 \otimes w_1, \dots, v_n \otimes v_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_n \otimes v_2, \dots, v_1 \otimes w_m, \dots, v_n \otimes v_m.$$

(c) Mit den Bezeichnungen in (b) sei $A_1 = M_{B_1}(\varphi_1) \in M_n(K)$ und $A_2 = M_{B_2}(\varphi_2) \in M_m(K)$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Spur}\big(M_B(\tilde{\varphi})\big) = \mathrm{Spur}(A_1)\mathrm{Spur}(A_2) \quad \text{und} \quad \det\big(M_B(\tilde{\varphi})\big) = \det(A_1)^m \det(A_2)^n.$$

Aufgabe 2. (Z) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über K mit zugehörigem Vektorraum V. Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ affine Unterräume von $\mathcal{A}$, und U_1, U_2 die zugehörigen Teilräume von V.

(a) Seien $P_1 \in \mathcal{U}_1$ und $P_2 \in \mathcal{U}_2$. Zeigen Sie: $\quad \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_1 P_2} \in U_1 + U_2.$

(b) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \varnothing$, so ist auch $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ein affiner Unterraum (mit zugehörigem Teilraum $U_1 \cap U_2 \leq V$) und es gilt $\dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = \dim \mathcal{U}_1 + \dim \mathcal{U}_2 - \dim(U_1 + U_2)$.

(c) Zeigen Sie: Ist $V = U_1 \oplus U_2$, so gilt $|\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2| = 1$.

Aufgabe 3. (**Bonus S**, 5 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $m \in R$ beliebig und

$$A_m := \begin{bmatrix} 0 & m & m & m^2 - m \\ 1 & m-1 & 3m-1 & m^2 - m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A_m.
(b) Sei R Körper. Für welche $m \in R$ ist A_m invertierbar?
(c) Sei $R = \mathbb{Z}$. Für welche $m \in R$ ist A_m invertierbar?

Aufgabe 4. (**Bonus S**, 11 Punkte) Sei $V = M_2(\mathbb{R})$ und sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, $\beta(A, B) =$Spur(AB).

(a) Zeigen Sie, dass β eine symmetrische Bilinearform ist.
(b) Finden Sie ein $0_V \neq v \in V$ mit $\beta(v, v) = 0$.
(c) Zeigen Sie, dass β nicht-ausgeartet ist. Ist β positiv-definit?
(d) Zeigen Sie, dass V eine Orthogonalbasis besitzt, und bestimmen Sie eine. Gibt es auch eine Othonormalbasis von V?

Aufgabe 5. (**Bonus S**, 7 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -4 & -11 & 11 \\ 3 & -12 & -42 & 42 \\ -2 & 12 & 37 & -34 \\ -1 & 7 & 20 & -17 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Sei $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung mit $\varphi(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von φ und zeigen Sie, dass φ eine Jordan Normalform besitzt.
(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von φ.
(c) Bestimmen Sie Gesamtzahl der Blöcke in der Jordan-Normalform von φ (ohne die genaue Jordan-Normalform zu berechnen).
(d) Bestimmen Sie die Jordan Normalform J von φ.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 17. Juli in den Übungsgruppen.