12. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Aufgabe 1. (V) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Sei $\varphi\colon V \to V$ eine nilpotente lineare Abbildung. Sei $d \geq 1$ minimal mit $\varphi^d = \underline{0}$. Dann ist also $\varphi^{d-1} \neq \underline{0}$ und es gibt ein $0 \neq v \in V$ mit $\varphi^{d-1}(v) \neq 0$. Zeigen Sie, dass v ein maximaler Vektor bezüglich φ ist.

Bemerkung: Für allgemeine lineare Abbildungen ist es erheblich schwieriger, einen maximalen Vektor zu finden; dazu siehe etwa Lemma 6 in Bongartz' Artikel `https://arxiv.org/abs/1410.1683`.

Aufgabe 2. (V) Sei $K = \mathbb{Q}$ und

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbb{Q}).$$

Sei $V = \mathbb{Q}^5$ und $\varphi\colon V \to V$ die lineare Abbildung mit $\varphi(v) = Av$ für $v \in V$. Sie rechnen sofort nach, dass $A^2 = 0$ gilt; also ist φ nilpotent. In dieser Aufgabe soll die Jordan-Normalform von φ bestimmt werden sowie eine Basis B von V so, dass $M_B(\varphi)$ in Jordan-Normalform ist.

(a) Berechnen Sie die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert 0. Was können Sie nun, zusammen mit der Information, dass $A^2 = 0$ gilt, über die Jordan-Normalform von φ aussagen? (Wieviele Jordan-Blöcke welcher Grösse gibt es?)

(b) Bestimmen Sie einen maximalen Vektor $0 \neq v \in V$ bzgl. φ (siehe Aufgabe 1). Was ist $\dim U_v$?

(c) Bestimmen Sie eine Basis B' für einen φ-invarianten Teilraum $W \leq V$ mit $V = U_v \oplus W$. (Siehe Beweis von Satz 2.9 für die Bestimmung von W.)

(d) Sei $\varphi' := \varphi|_W\colon W \to W$. Bestimmen Sie die Matrix $A' = M_{B'}(\varphi')$. Dann ist φ' auch nilpotent (siehe Folgerung 2.10). Wenden Sie nun das ganze vorherige Verfahren auf $\varphi'\colon W \to W$ an und bestimmen Sie eine Basis B'' von W, so dass $M_{B''}(\varphi')$ in Jordan-Normalform ist.

(e) Kombinieren Sie B'' mit einer Basis von U_v, um eine Basis B von V zu erhalten, so dass $M_B(\varphi)$ in Jordan-Normalform ist.

Aufgabe 3. (**S**, 4 Punkte) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \leq V$ ein Teilraum.

(a) Sei $n := \dim V < \infty$ und $d = \dim U \leq n$. Sei $\{v_1, \ldots, v_d\}$ eine Basis von U; diese können wir zu einer Basis $B = \{v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_n\}$ von V ergänzen. Zeigen Sie, dass dann $\{v_{d+1} + U, \ldots, v_n + U\}$ eine Basis von V/U ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $\dim(V/U) < \infty$, so gibt es einen Teilraum $W \leq V$ mit $\dim W = \dim(V/U)$ und $V = U \oplus W$. (*Hinweis:* Sei $m = \dim W$; wähle Vektoren $w_1, \ldots, w_m \in V$ so, dass $\{w_1 + U, \ldots, w_m + U\}$ eine Basis von V/U ist.)

Aufgabe 4. (V) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ der Dualraum. Seien $U_1, U_2 \leq V$ Teilräume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt $\{0_V\}^\circ = V^*$ und $V^\circ = \{0_{V^*}\}$.
(b) Ist $U_1 \subseteq U_2$, so gilt $U_2^\circ \subseteq U_1^\circ$.
(c) Es gilt $(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$.
(d) Es gilt $(U_1 \cap U_2)^\circ \supseteq U_1^\circ + U_2^\circ$.
(e) Ist $\dim V < \infty$, so gilt $(U_1 \cap U_2)^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ$.

Aufgabe 5. (**S**, 4 Punkte) Sei K ein Körper. Seien V und W Vektorräume über K. Sei $U \leq V$ ein Teilraum. Sei $\pi : V \to V/U$ der kanonische Homomorphismus und $\pi^* \colon (V/U)^* \to V^*$ die transponierte Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass π^* injektiv ist. (*Hinweis:* Satz 2.11.)
(b) Sei $\lambda \in V^*$. Zeigen Sie: Gilt $\lambda(u) = 0$ für alle $u \in U$, so gibt es ein $\hat{\lambda} \in (V/U)^*$ mit $\hat{\lambda}(\bar{v}) = \lambda(v)$ für alle $v \in V$ (wobei $\bar{v} = v + U \in V/U$).
(c) Schließen Sie nun, dass $\mathrm{Bild}(\pi^*) = U^\circ$ gilt. Folgern Sie, dass $(V/U)^* \cong U^\circ$.

Aufgabe 6. (Z) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Sind $U, W \leq V$ Teilräume, so gilt
$$(U + W)/U \cong W/(U \cap W).$$
(*Hinweis:* Betrachten Sie die Einschränkung des kanonischen Homomorphimus $\pi \colon V \to V/U$ auf W; bestimmen Sie Kern und Bild dieser Einschränkung.)
(b) Sind $U \leq W \leq V$ Teilräume, so ist $W/U \leq V/U$ ein Teilraum und es gilt
$$(V/U)/(W/U) \cong V/W.$$

Bemerkung: Diese Aussagen werden oft als 2. und 3. Isomorphiesatz bezeichnet; siehe zum Beispiel `https://en.wikipedia.org/wiki/Isomorphism_theorems`. In dieser Terminologie wird der Homomorphiesatz als 1. Isomorphiesatz bezeichnet.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 10. Juli in den Übungsgruppen.