11. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Vorab eine allgemeine Anmerkung zu Normalformen. Sei $A \in M_n(K)$ eine beliebige Matrix. Dann betrachten wie die lineare Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^n$, $v \mapsto Av$. Die Matrix A ist also die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basis der Einheitsvektoren $\{e_1, \dots, e_n\}$ von K^n. Nach dem Satz über die Frobenius-Normalform gibt es eine Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von K^n, so dass

$$A' := M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} \boxed{A_{f_1}} & & & 0 \\ & \boxed{A_{f_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_{f_r}} \end{bmatrix} \in M_n(K)$$

gilt, wobei die f_i normierte Polynome sind mit $f_r \mid f_{r-1} \mid \dots | f_1$ und f_1 das Minimalpolynom von A ist. Sei $T \in M_n(K)$ die Basiswechselmatrix zwischen B und der Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$, d.h., die Spalten von T bestehen genau aus den Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_n \in K^n$. Dann gilt also $A' = M_B(\varphi) = T^{-1}AT$, d.h., A **ist ähnlich zur obigen Matrix** A' **und wir bezeichnen** A' **auch als die Frobenius-Normalform von** A. (Analog sprechen wir von der Jordan-Normalform einer Matrix $A \in M_n(K)$ für den Fall, dass das charakteristische Polynom von A zerfallend ist.)

Aufgabe 1. (V) Sei $K = \mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen.

(a) Sei $A \in M_3(K)$ eine invertierbare Matrix. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für die Frobenius-Normalform von A. (*Hinweis:* Es gibt 6 solche Möglichkeiten.)

(b) Wieviele invertierbare Matrizen $A \in M_3(K)$ gibt es insgesamt?

Aufgabe 2. (**S**, 5 Punkte) Sei K ein beliebiger Körper. Für ein normiertes Polynom $0 \neq f \in K[X]$ mit Grad $n \geq 1$ sei $A_f \in M_n(K)$ die Begleitmatrix von f.

(a) Zeigen Sie, dass A_f und A_f^{tr} ähnliche Matrizen sind. (*Hinweis:* Was ist das Minimalpolynom von A_f^{tr}? Benutzen Sie dann die Äquivalenzen in Beispiel 2.13, angewandt auf die lineare Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^n$, $v \mapsto A_f^{\mathrm{tr}} v$.)

(b) Sei $A \in M_n(K)$ eine beliebige Matrix. Zeigen Sie, dass A und A^{tr} ähnlich sind. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Frobenius-Normalform von A, siehe oben.)

Aufgabe 3. (V) Sei $K = \mathbb{Q}$ und $\varphi\colon \mathbb{Q}^7 \to \mathbb{Q}^7$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^3 = \underline{0}$ und $\dim \mathrm{Kern}(\varphi) = 3$. Welche Möglichkeiten gibt es für das Minimalpolynom und die Jordan-Normalform von φ?

Aufgabe 4. (**S**, 4 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1+i) & 2i \\ 0 & 1+i & 1+i \\ -i & \frac{1}{2}(-1+i) & 1+2i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Sei $\varphi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ die lineare Abbildung mit $\varphi(v) = Av$ für $v \in \mathbb{C}^3$. Zeigen Sie, dass φ zerfallend ist. Bestimmen Sie das Minimalpolynom und die Jordan-Normalform von φ.

Aufgabe 5. (V) Sei K ein Körper. Gegeben seien Matrizen $A_i \in M_{n_i}(K)$ für $1 \leq i \leq r$. Sei $n := n_1 + \ldots + n_r$ und $A \in M_n(K)$ die Blockdiagonalmatrix mit Diagonalblöcken gegeben durch $A_1, \ldots, A_r$, also

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_r} \end{bmatrix} \in M_n(K).$$

Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von A das kgV der Minimalpolynome von $A_1, \ldots, A_r$ ist.

Aufgabe 6. (Z) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: $\quad A$ nilpotent $\quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Spur}(A^d) = 0$ für $1 \leq d \leq n$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbb{C}[X]$ zerfallend ist. Also ist $\chi_A = (-1)^n(X-\lambda)^{n_1} \cdots (X-\lambda_r)^{n_r}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $n_i \geq 1$. Zeigen Sie dann $\mathrm{Spur}(A^d) = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i^d$ und erinnern Sie sich schließlich an die Vandermonde-Matrix.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 3. Juli in den Übungsgruppen.