10. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Aufgabe 1. (V) Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K in der Unbestimmten X. Ist $0 \neq f \in K[X]$ und $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ mit $a_i \in K$ und $a_n = 1$, so heißt f normiert.

Gegeben seien nun $0 \neq f_i \in K[X]$ für $1 \leq i \leq r$. Ein normiertes Polynom $0 \neq d \in K[X]$ heißt *kleinstes gemeinsames Vielfaches* der f_i, wenn $f_i \mid d$ für $1 \leq i \leq r$ gilt und d kleinstmöglichen Grad mit dieser Eigenschaft hat.

(a) Zeigen Sie, dass es stets ein kleinstes gemeinsames Vielfaches der f_i gibt.

Im Folgenden sei $d \in K[X]$ ein kleinstes gemeinsames Vielfaches der f_i.

(b) Sei $0 \neq d' \in K[X]$ beliebig mit $f_i \mid d'$ für $1 \leq i \leq r$. Zeigen Sie, dass dann $d \mid d'$ gilt.
(c) Zeigen Sie, dass d eindeutig bestimmt ist. Wir können also $d = \mathrm{kgV}(f_1, \ldots, f_r)$ schreiben.
(d) Ist $r \geq 3$, so kann d rekursiv berechnet werden:

$$\mathrm{kgV}(f_1, \ldots, f_r) = \mathrm{kgV}\big(\mathrm{kgV}(f_1, \ldots, f_{r-1}), f_r\big).$$

(e) Sei $K = \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie $\mathrm{kgV}(X^2 - 1, X^3 + X^2 - 2X - 2, X)$.

Aufgabe 2. (**S**, 3 Punkte) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei $\mu_\varphi \in K[X]$ das Minimalpolynom von φ. Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Für $1 \leq i \leq n$ sei $\mu_{v_i} \in K[X]$ das Minimalpolynom von v_i bzgl. φ. Zeigen Sie, dass $\mu_\varphi = \mathrm{kgV}(\mu_{v_1}, \ldots, \mu_{v_n})$ gilt.

Aufgabe 3. (**S**, 5 Punkte) Sei $K = \mathbb{F}_2$ und $\varphi\colon K^5 \to K^5$ die lineare Abbildung aus Ü9A3.

(a) Zeigen Sie, dass der Einheitsvektor $e_5 \in K^5$ ein maximaler Vektor bzgl. φ ist.
(b) Bestimmen Sie eine Zerlegung $V = U_{v_1} \oplus \ldots \oplus U_{v_d}$ wie im Hauptsatz über die Zerlegung in φ-zyklische Teilräume.
(c) Bestimmen Sie die Frobenius-Normalform von φ (siehe Folgerung 2.12).

Aufgabe 4. (V) Sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $n := \dim V < \infty$. Sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $\chi_\varphi \in K[X]$ das charakteristische Polynom von φ.

(a) Sei $V = U_{v_1} \oplus \ldots \oplus U_{v_d}$ wie im Hauptsatz über die Zerlegung in φ-zyklische Teilräume. Für $1 \leq i \leq d$ sei $f_i := \mu_{v_i}$ das Minimalpolynom von v_i. Zeigen Sie $\chi_\varphi = (-1)^n f_1 \cdots f_d$.
(b) Sei $K = \mathbb{Q}$, $n = 7$ und $\chi_\varphi = -X^3(X^2+1)^2$. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für die Frobenius-Normalform von φ. (Zum Beispiel könnte $d = 1$ sein, die Normalform also nur aus einem Diagonalblock mit der Begleitmatrix $A_{X^3(X^2+1)^2}$ bestehen; wie groß kann d maximal sein?)

Aufgabe 5. (V) Sei K ein Körper. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$ betrachten wir $J_n(\lambda) \in M_n(K)$ aus Ü9A5. Sei $\varphi \colon K^n \to K^n$ die lineare Abbbildung mit $\varphi(v) = J_n(\lambda)v$ für $v \in K^n$. Sei $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Basis der Einheitsvektoren von K^n.

(a) Zeigen Sie, dass e_n ein maximaler Vektor (bzgl. φ) ist und bestimmen Sie $\dim U_{e_n}$.
(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von φ.
(c) Vertauschen wir die Reihenfolge der e_i in der Basis B, so erhalten wir eine neue Basis $B' = \{e_n, \ldots, e_1\}$. Bestimmen Sie $M_{B'}(\varphi)$. Schließen Sie, dass $J_n(\lambda)$ und $J_n(\lambda)^{\mathrm{tr}}$ ähnliche Matrizen sind.

Aufgabe 6. (Z) Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K in der Variablen X. Gegeben seien $0 \neq f, g \in K[X]$. Hier soll ein Verfahren zur Berechnung von $\mathrm{kgV}(f, g)$ entwickelt werden.

(a) Zeigen Sie analog zu LAAG1, Ü2A3, dass es $r, s \in K[X]$ so gibt, dass $h := rf + sg \in K[X]$ ungleich 0 und normiert ist, sowie $h \mid f$ und $h \mid g$ gilt.
(b) Formulieren Sie einen Algorithmus, mit dem man h, r, s durch wiederholtes Teilen mit Rest bestimmen kann (analog zum Euklidischen Algorithmus in LAAG1, Ü2A3).
(c) Zeigen Sie, dass $fg = \mathrm{kgV}(f, g)\, h$ gilt. (Insbesondere ist h eindeutig bestimmt.)
(d) Schreiben Sie ein Computer-Programm mit
`Input`: Polynome $0 \neq f_i \in K[X]$ für $1 \leq i \leq m$; `Output`: $\mathrm{kgV}(f_1, \ldots, f_m)$.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 26. Juni in den Übungsgruppen.