9. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Aufgabe 1. (V)

(a) Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in M_n(\mathbb{C})$, die sowohl normal als auch nilpotent sind.
(b) Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in M_n(\mathbb{R})$, die sowohl symmetrisch als auch nilpotent sind.
(c) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ normal. Zeigen Sie: Ist $B \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotent mit $A+B = I_n$, so folgt $A = I_n$.

Aufgabe 2. (V) Sei $V = \mathbb{Q}^3$ und $\varphi\colon V \to V$ die lineare Abbildung mit

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4y \\ 0 \\ 5z \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das kleinste $m \geq 1$ mit $\mathrm{Kern}(\varphi^m) = \mathrm{Kern}(\varphi^{m+i})$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
(b) Bestimmen Sie die Zerlegung $V = U \oplus U'$ wie in Fittings Lemma, sowie $\dim U$ und $\dim U'$.
(c) Bestimmen Sie die Minimalpoynome der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 (bezüglich φ).

Aufgabe 3. (V) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_5(K) \qquad \text{wobei} \qquad K = \mathbb{F}_2.$$

Sei $\varphi\colon K^5 \to K^5$ die lineare Abbildung mit $\varphi(v) = Av$ für $v \in K^5$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_φ. Zeigen Sie, dass χ_φ zerfallend ist.
(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ, sowie Basen für die verallgemeinerten Eigenräume.
(c) Geben Sie eine Basis B von K^5 an, so dass $M_B(\varphi)$ eine Blockdiagonalgestalt wie im Hauptsatz über die Hauptraumzerlegung hat.

Aufgabe 4. (**S**, 4 Punkte) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Sei $\varphi\colon V \to V$ eine zerfallende lineare Abbildung. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ die Eigenwerte von φ. Für $1 \leq i \leq r$ sei $E_\varphi(\lambda_i) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda_i v\}$ der Eigenraum zu λ_i. Wie in der Vorlesung bemerkt, ist $E_\varphi(\lambda_i)$ im verallgemeinerten Eigenraum $H_\varphi(\lambda_i)$ enthalten.

Zeigen Sie: $\qquad \varphi$ diagonalisierbar $\iff$ $E_\varphi(\lambda_i) = H_\varphi(\lambda_i)$ für $1 \leq i \leq r$.

Aufgabe 5. (**S**, 6 Punkte) Sei K ein Körper. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$ definiere die Matrix

$$J_n(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & & & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in M_n(K).$$

(Obere Dreiecksmatrix mit λ auf der Diagonalen und 1 unmittelbar über der Diagonalen.) Sei $\varphi\colon K^n \to K^n$ die lineare Abbbildung mit $\varphi(v) = J_n(\lambda)v$ für $v \in K^n$. Da $J_n(\lambda)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt $\chi_\varphi = (\lambda - X)^n$; insbesondere ist λ der einzige Eigenwert von φ. Die Matrix $J_n(\lambda)$ heißt Jordan-Block zum Eigenwert λ.

(a) Bestimmen sie die Dimensionen des Eigenraums sowie des verallgemeinerten Eigenraums zu λ.
(b) Für $n = 2, 3, 4$, finden Sie Formeln für die Potenzen $J_n(\lambda)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 19. Juni in den Übungsgruppen.