8. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Aufgabe 1. (**S**, 7 Punkte) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ beliebig. Zeigen Sie:

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist $\bar{\lambda}$ auch ein Eigenwert von A^*.
(b) Ist A normal (also $AA^* = A^*A$) und $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A (mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$), so ist v auch ein Eigenvektor von A^* (mit Eigenwert $\bar{\lambda}$).
(c) Genau dann ist A hermitesch, wenn A normal ist and alle Eigenwerte von A reell sind.

Aufgabe 2. (V)

(a) Geben Sie für $n = 2, 3, 4$ Beispiele von Matrizen $A \in M_n(\mathbb{C})$ an, die normal aber nicht hermitesch sind.
(b) Sei $n \geq 2$. Ist die Menge der normalen Matrizen ein Teilraum von $M_n(\mathbb{C})$?

Aufgabe 3. (V) Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K in der Unbestimmten X. Sei $f \in K[X]$ mit $f \neq 0$ gegeben.

(a) Sei $c \in K$ eine Nullstelle von f, also $f(c) = 0$. Zeigen Sie: Es gibt ein eindeutiges $m \in \mathbb{N}$ und ein Polynom $0 \neq g \in K[X]$ mit $f = (X - c)^m g$ und $g(c) \neq 0$. Dieses m heißt die Vielfachheit von c als Nullstelle von f.
(b) Es gelte $f = (X - c)^j h$ mit $c \in K$, $j \in \mathbb{N}$ und $h \in K[X]$. Zeigen Sie: Es gilt $j \leq m$, wobei m wie in (a) definiert ist.
(c) Sei f zerfallend; es gibt also eine Darstellung $f = c(X - c_1)^{m_1} \cdots (X - c_r)^{m_r}$ mit $0 \neq c \in K$, $c_1, \ldots, c_r \in K$ paarweise verschieden und $m_i \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq r$. Zeigen Sie, dass diese Darstellung bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist.

Aufgabe 4. (**S**, 5 Punkte) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$, und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\varphi^k := \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ (mit k Faktoren).

(a) Zeigen Sie: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ mit
$$\mathrm{Kern}(\varphi) \subsetneqq \mathrm{Kern}(\varphi^2) \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathrm{Kern}(\varphi^m) = \mathrm{Kern}(\varphi^{m+1}).$$
(b) Sei m wie in (a). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(\varphi^m) = \mathrm{Kern}(\varphi^{m+i})$ gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ (und nicht nur für $i = 1$ wie in (a)).

Aufgabe 5. (V) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$, und $\varphi\colon V \to V$ eine nilpotente lineare Abbildung. Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^m = \underline{0}$ (Null-Abbildung).

(a) Sei $n = 2$ und $\varphi \neq \underline{0}$. Zeigen Sie:
Es gilt $\dim \operatorname{Bild}(\varphi) = 1$ und es gibt eine Basis B von V mit $M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Sei $n = 3$ und $\varphi \neq \underline{0}$. Zeigen Sie: Es gibt eine Basis B von V mit

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{oder} \qquad M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 5. Juni in den Übungsgruppen.