7. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Aufgabe 1. (**S**, 7 Punkte) Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Nach Aufgabe 5 von Blatt 15 aus LAAG1 ist die *Moore–Penrose–Inverse* $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ zu A eine Pseudo–Inverse von A so, dass AB und BA symmetrisch sind. Dort wurde auch gezeigt, dass B, falls existent, durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

Hier geben wir eine Methode zur Berechnung der Moore–Penrose–Inversen zu A.

Sei $U := \mathrm{SR}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ der Spaltenraum von A. Seien $e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{R}^m$ die Spalten der Einheitsmatrix I_m. Nach Satz 3.11 gibt es zu $j \in \{1, \ldots, m\}$ genau ein $b_j \in U$ mit

$$||e_j - b_j|| = \min\{||e_j - u|| \bigm| u \in U\}.$$

Betrachte dann das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Matrix $[A|b_j]$; dies ist lösbar wegen $b_j \in U = \mathrm{SR}(A)$. Nach Satz 3.13 gibt es eine eindeutige Lösung mit minimaler Norm, die wir mit $a_j^+ \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen. Sei dann $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die Matrix mit Spalten $a_1^+, \ldots, a_m^+$.

(a) Bestimmen Sie A^+ für $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$. Zeigen Sie, dass A^+ die Moore–Penrose–Inverse zu A ist.

(b) Bestimmen Sie B^+ für

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zeigen Sie, dass B^+ die Moore–Penrose–Inverse zu B ist.

(c) Sei $m \leq n$ und $\mathrm{Rang}(A) = m$. Zeigen Sie: Es ist AA^{tr} invertierbar und die Matrix

$$A^+ := A^{\mathrm{tr}}(AA^{\mathrm{tr}})^{-1}$$

ist die Moore–Penrose–Inverse zu A.

Aufgabe 2. (V) Sei (V, β) ein Euklidischer Raum der Dimension n.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $O(V, \beta)$ der orthogonalen linearen Abbildungen $\varphi\colon V \to V$ mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie ohne (a) zu verwenden, dass

$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^{\mathrm{tr}} \cdot A = I_n\}$$

mit dem üblichen Matrixprodukt als Verknpfung eine Gruppe bildet.

Aufgabe 3. (V) Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$ als Euklidischen Raum mit dem Standard-Skalarprodukt.

Sei $A \in M_2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $A \in O(2)$ genau dann, wenn

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \qquad \text{oder} \qquad A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

gilt, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Aufgabe 4. (**S**, 5 Punkte) Gegeben sei die symmetrische Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie Basen der zugehörigen Eigenräume.
(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für jeden Eigenraum.
(c) Bestimmen Sie $T \in O(3)$ so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 5. (V) Sei (V, β) ein Euklidischer Raum mit Norm $||-|| = \sqrt{\beta(-,-)}$.
Für $0 \neq r \in V$ sei

$$\varphi_r\colon V \to V, \quad v \longmapsto v - 2\frac{\beta(r,v)}{\beta(r,r)}r$$

die *Spiegelung* an r. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Es ist φ_r ist eine orthogonale lineare Abbildung mit $\varphi_r \circ \varphi_r = \mathrm{id}_V$ und $\varphi_r(r) = -r$.
(b) Für $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi_{\lambda r} = \varphi_r$.
(c) Seien $u, v \in V$ mit $||u|| = ||v||$ und $u \neq v$. Es gibt $0 \neq r \in V$ mit $\varphi_r(u) = v$ und $\varphi_r(v) = u$.
(d) Es gibt eine Basis B von V so, dass $M_B(\varphi_r)$ eine Diagonalmatrix ist mit genau einer -1 und sonst nur $+1$ auf der Diagonalen.

Nach dem `Satz von Cartan-Dieudonné` lässt sich jedes Element von $O(V, \beta)$ als Produkt von höchstens $n = \dim V$ Spiegelungen schreiben.

Aufgabe 6. (Z)

(a) Sei (V, β) ein Euklidischer Raum mit Norm $||-|| = \sqrt{\beta(-,-)}$. Zeigen Sie, dass

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$$

für alle $u,\ v \in V$ gilt.

(b) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$N : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad v \longmapsto N(v),$$

die folgende Bedingungen erfüllt.
(i) Es ist $N(v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.
(ii) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$.
(ii) Für $u,\ v \in V$ gilt $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$.
Sei N eine Norm auf V so, dass

$$N(u+v)^2 + N(u-v)^2 = 2(N(u)^2 + N(v)^2)$$

für alle $u,\ v \in V$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\beta : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \longmapsto \frac{1}{4}(N(u+v)^2 - N(u-v)^2),$$

ein Skalarprodukt auf V definiert und, dass $N(v) = \sqrt{\beta(v,v)}$ für alle $v \in V$ gilt.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 29. Mai in den Übungsgruppen.