6. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Aufgabe 1. (**S**, 6 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $V = P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen von Grad höchstens n. Es ist $B = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ mit $p_i(x) = x^i$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Basis von V.

Sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform gegeben durch

$$\beta(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \qquad \text{für } f,g \in V.$$

In der Vorlesung wurde bemerkt, dass $\beta(f,f) > 0$ für alle $0 \neq f \in V$.

Durch Anwendung der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung auf die Basis B erhalten wir die Orthogonalbasis $B' = \{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ von V.

(a) Berechnen Sie l_0, l_1, l_2 und l_3.
(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $P_2(\mathbb{R})$.

Die `Legendre`-Polynome $L_i := l_i(1)^{-1} l_i$ haben in Analysis und Physik viele wichtige Anwendungen. Siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Legendre-Polynom`.

Aufgabe 2. (**S**, 4 Punkte) Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$. Sei $t \in \mathbb{R}$ und $\beta_t\colon V \times V \to \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform mit Gram-Matrix

$$M_B(\beta_t) = \begin{bmatrix} t & t & 0 \\ t & 2 & t \\ 0 & t & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, so dass β_t positiv-definit ist.
(b) Sei $t = -2$. Bestimmen Sie für β_{-2} die Parameter p, q wie im Trägheitssatz von Sylvester.

Aufgabe 3. (V) Sei (V, β) ein Euklidischer Raum mit Norm $||v|| = \sqrt{\beta(v,v)}$ für $v \in V$.

Gegeben seien $u, v \in V$ mit $||u|| = 3$, $||u+v|| = 4$ und $||u-v|| = 6$. Bestimmen Sie $||v||$.

Aufgabe 4. (V) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ das Standard-Skalarprodukt. Gegeben sei ein Dreieck mit Kantenlängen a, b, c. Sei d die Länge der Verbindung vom Mittelpunkt der Kante mit Länge c zum gegenüberliegenden Eckpunkt.

Zeigen Sie die `Apollonios`–Identität $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2d^2$.

Aufgabe 5. (V)

(a) Sei (V, β) ein Euklidischer Raum. Sei $\lambda \colon V \to \mathbb{R}$ linear. Zeigen Sie, dass es genau ein $u \in V$ gibt mit $\lambda(v) = \beta(u, v)$ für alle $v \in V$.

(b) Sei $V = P_2(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen von Grad höchstens 2. Es ist V ein Euklidischer Raum mit Skalarprodukt

$$\beta(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \qquad \text{für alle } f, g \in V.$$

Bestimmen Sie $g \in V$ so, dass $f(1) = \beta(g, f)$ für alle $f \in V$.

Die Verallgemeinerung von Aufgabenteil (a) auf unendlichdimensionale Räume ist als `Rieszscher Darstellungssatz` einer der zentralen Sätze der Funktionalanalysis.

Aufgabe 6. (V) In dieser Aufgabe wird ein Beispiel zur Methode der kleinsten Quadrate behandelt (siehe Beispiel 3.12). Gegeben seien folgende Messwerte (t_i, y_i) für $i = 1, 2, 3, 4$:

i	1	2	3	4
t_i	0	1	2	3
y_i	1	3	4	4

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade mit Gleichung $y = at + b$ möglichst nahe an den Punkten (t_i, y_i) für $i = 1, 2, 3, 4$ vorbeiläuft, d.h., der Fehler

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{4} \big(y_i - (at_i + b)\big)^2 \quad \text{wird minimal.}$$

Hinweis: Wie in Beispiel 3.12 betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} at_1 + b \\ at_2 + b \\ at_3 + b \\ at_4 + b \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis des Teilraums $U = \varphi(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^4$; wenden Sie dann Satz 3.11 an, um die gewünschten a, b zu finden. (Mit Folgerung 2.6 ist es nicht nötig, $U^\perp$ zu berechnen.)

Aufgabe 7. (Z) Sei (V, β) ein Euklidischer Raum mit Norm $||v|| = \sqrt{\beta(v, v)}$ für $v \in V$. Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Gegeben seien $w_1, \ldots, w_n \in V$ mit

$$||v_i - w_i|| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

für $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von V ist.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 22. Mai in den Übungsgruppen.