5. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Aufgabe 1. (**S**, 4 Punkte) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei $\beta\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform (nicht unbedingt symmetrisch). Es seien Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegeben mit $\beta(v_i, v_i) \neq 0_K$ für $1 \leq i \leq n$ und $\beta(v_i, v_j) = 0_K$ für $1 \leq i < j \leq n$. Zeigen Sie, dass die Folge $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 2. (**S**, 6 Punkte)

(a) Sei $K = \mathbb{Q}$ und $V = K^3$. Sei $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis der Einheitsvektoren von V und $\beta\colon V \times V \to K$ die Bilinearform mit $M_B(\beta) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.
Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von V.

(b) Sei $K = \mathbb{F}_2$ und $V = K^4$. Sei $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis der Einheitsvektoren von V und $\beta\colon V \times V \to K$ die Bilinearform mit $M_B(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Berechnen Sie $\beta(v, v)$ für $v \in V$ beliebig. Gibt es auch hier eine Orthogonalbasis?

Aufgabe 3. (V) Sei $V = P_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3. Sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform gegeben durch

$$\beta(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx \qquad \text{für } f, g \in V.$$

Sei $U = \langle f \rangle_{\mathbb{R}}$ mit $f(x) = 6x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$.

Aufgabe 4. (V) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Sei $\beta\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform und $U \leq V$ ein Teilraum.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $\dim U^\perp \geq \dim V - \dim U$ (auch wenn β nicht nicht-ausgeartet ist).
(b) Zeigen Sie: Ist β nicht-ausgeartet, so gilt $(U^\perp)^\perp = U$.
(c) Geben Sie ein Beispiel an mit β nicht-ausgeartet und $\{0\} \neq U = U^\perp$.

Aufgabe 5. (V) Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$. Wie in LAAG1 haben wir dann die Teilräume $N(A) = \{x \in K^n \mid Ax = 0_m\} \subseteq K^n$ und $\mathrm{SR}(A) = \{Ax \mid x \in K^n\} \subseteq K^m$ (Spaltenraum von A). Analog ist $\mathrm{SR}(A^{\mathrm{tr}}) = \{A^{\mathrm{tr}}y \mid y \in K^m\} \subseteq K^n$ der Spaltenraum von A^{tr}. Sei $\beta\colon K^n \times K^n \to K$ die Standard-Bilinearform. Zeigen Sie: $\quad N(A) = \mathrm{SR}(A^{\mathrm{tr}})^\perp \quad$ und $\quad N(A)^\perp = \mathrm{SR}(A^{\mathrm{tr}})$.
Hinweis: Wenn Sie zuerst $\dim N(A) = \dim \mathrm{SR}(A^{\mathrm{tr}})^\perp$ zeigen, so müssen Sie danach nur noch eine der Inklusionen "$\subseteq$" oder "$\supseteq$" beweisen.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 15. Mai in den Übungsgruppen.