4. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Aufgabe 1. (V) Gegeben sei Matrix $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ für $t \in \mathbb{Q}$.

(a) Bestimmmen Sie alle $t \in \mathbb{Q}$ für welche $A(t)$ invertierbar ist.

(b) Sei $t \in \mathbb{Q}$ so, dass $A(t)$ invertierbar ist. Bestimmen Sie $A(t)^{-1}$ mit Hilfe der Formel $A(t)^{-1} = \det(A(t))^{-1}\tilde{A}(t)$ wobei $\tilde{A}(t)$ die Adjunkte von $A(t)$ ist.

Aufgabe 2. (V) Sei K ein Körper, $1 \leq m < n$ und $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \in M_n(K)$ eine Blockmatrix mit $A \in K^{m\times m}$, $B \in K^{m\times(n-m)}$, $C \in K^{(n-m)\times m}$, $D \in K^{(n-m)\times(n-m)}$. Sei $\det(A) \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0_{m\times(n-m)} \\ \hline CA^{-1} & I_{n-m} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{(n-m)\times m} & D - CA^{-1}B \end{array}\right]$ gilt.

(b) Folgern Sie, dass $\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]\right) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$ gilt.

(c) Berechnen Sie auf diese Weise ($m = 2$) die Determinante von $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{F}_3)$.

Die Matrix $D - CA^{-1}B$ heißt *Schur-Komplement* zu A (nach Issai Schur, 1875–1941).

Aufgabe 3. (V) Sei K ein Körper und $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K)$. Wie in der Vorlesung definieren wir $\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + \ldots + a_{nn}$ als Summe der Diagonaleinträge von A.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{Spur}\colon M_n(K) \to K, A \mapsto \mathrm{Spur}(A)$, linear ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für alle $A, B \in M_n(K)$ gilt.

(c) Folgern Sie aus (b), dass $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$ gilt, wenn A, B ähnlich sind.
(In der Vorlesung, Lemma 4.4, wurde dies auf andere Weise gezeigt).

Aufgabe 4. (V) Sei K ein Körper und $V = K^{m\times n}$ der Vektorraum der $(m \times n)$-Matrizen über K.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Spur}\big(A^{\mathrm{tr}}B\big)$, eine symmetrische Bilinearform ist. (Beachte: $A^{\mathrm{tr}}B \in M_n(K)$.)

(b) Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ sei $E_{ij} \in V$ die Matrix mit Eintrag 1 an der Stelle (i, j), und 0 überall sonst. Dann ist $B = \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ eine Basis von V. Bestimmen Sie die Gram-Matrix G von β bezüglich der Basis B. Was ist $\det(G)$?

Aufgabe 5. (Z) Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Sind $A, B \in M_n(K)$, so haben AB und BA das gleiche charakteristische Polynom, aber nicht unbedingt das gleiche Minimalpolynom. (Geben Sie für letzteres ein Beispiel an.)
Hinweis: Siehe zum Beispiel `https://math.stackexchange.com/questions/311342`