# 3. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Auf diesem Übungsblatt sind nur schriftliche Aufgaben, da am 1. Mai keine Übungsgruppen stattfinden. (Sie haben 2 Wochen Zeit für die Bearbeitung.)

**Aufgabe 1.** (**S**, 6 Punkte) Sei $n \geq 1$ und $A_n = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{Q})$ die Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j, \\ -1 & \text{falls } i = j+1 \text{ oder } i = j-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie $A_n$ für $n = 1, 2, 3, 4$ explizit auf und berechnen Sie $\det(A_n)$.

(b) "Raten" Sie mit den Ergebnissen aus (a) eine allgemeine Formel für $\det(A_n)$ und beweisen Sie diese Formel (z.B. mit vollständiger Induktion).

**Aufgabe 2.** (**S**, 7 Punkte) Sei $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Dann heißt $A$ invertierbar über $\mathbb{Z}$, wenn es ein $B \in M_n(\mathbb{Z})$ gibt mit $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

(a) Zeigen Sie: $\qquad A$ invertierbar über $\mathbb{Z} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(A) = \pm 1.$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit über $\mathbb{Z}$, und berechnen Sie die inverse Matrix über $\mathbb{Z}$ (falls die Matrix invertierbar ist):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}), \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}), \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}).$$

**Aufgabe 3.** (**S**, 3 Punkte) Sei $A$ eine der drei Matrizen in Aufgabe 2(b). Wir fassen $A$ als Matrix in $M_n(\mathbb{Q})$ auf. Berechnen Sie dann jeweils das charakteristische Polynom $\chi_A = \det(A - XI_n) \in \mathbb{Q}[X]$.

**Aufgabe 4.** (Z) Sei $R$ ein kommutativer Ring mit 1. Seien $n \geq 2$ und $x_1, \ldots, x_n \in R$. Zeigen Sie:

$$\det\left( \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-2} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{bmatrix} \right) = (x_1 + \ldots + x_n) \det(V(x_1, \ldots, x_n)),$$

wobei $V(x_1, \ldots, x_n)$ die Vandermonde-Matrix wie in Beispiel 3.3 ist. (Bis auf die letzte Spalte stimmt also die obige Matrix mit der Vandermonde-Matrix $V(x_1, \ldots, x_n)$ überein.)

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** 8. Mai in den Übungsgruppen.