

## 2. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

**Aufgabe 1.** (V) Berechnen Sie, nun mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen (und Bemerkung 2.3 in Kapitel 4), noch einmal die Determinanten der beiden Matrizen in Aufgabe 5, Blatt 1.

**Aufgabe 2.** (S, 3 Punkte) Sei  $R$  ein beliebiger kommutativer Ring mit 1.

Zeigen Sie, dass die folgende Aussage im Allgemeinen falsch ist:

Es gilt  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$  für  $A, B \in M_n(R)$ .

**Aufgabe 3.** (S, 6 Punkte) Gegeben sei die  $3 \times 3$  Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad \text{wobei} \quad a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}.$$

Es gelte  $\det(A) = -7$ . Für  $0 \neq x \in \mathbb{R}$  beliebig, berechnen Sie:

$$\det(A^{-1}), \quad \det(xA), \quad \det(xA^{-1}), \quad \det((xA)^{-1}), \quad \det \left( \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix} \right).$$

**Aufgabe 4.** (V) Gegeben sei die  $3 \times 3$  Matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ .

(a) Berechnen Sie die Determinante von  $A$ .

(b) Sei  $b \in \mathbb{Q}^3$  beliebig, mit Komponenten  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Q}$ . Begründen Sie, warum es genau ein  $x \in \mathbb{Q}^3$  gibt mit  $Ax = b$ . Bestimmen Sie Formeln für die Komponenten  $x_1, x_2, x_3$  von  $x$  (in Abhängigkeit von  $b_1, b_2, b_3$ ).

**Aufgabe 5.** (V)

(a) Berechnen Sie  $\det(A)$  für  $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & \sqrt{2} & \frac{165}{2} \\ \sqrt{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 20 & 1000 & 0 & 10 \\ 0 & -\frac{19}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ .

(b) Berechnen Sie  $\det(A)$  für  $A = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{5} & \bar{5} \\ \bar{7} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{11} & \bar{3} & \bar{9} \end{bmatrix} \in M_3(K)$  und die beiden Fälle  $K = \mathbb{F}_3$  und  $K = \mathbb{F}_5$ .

*Hinweis:* Benutzen Sie geschickt elementare Zeilenumformungen; wegen  $\det(A) = \det(A^{\text{tr}})$  können Sie zusätzlich auch noch elementare Spaltenumformungen verwenden.

Schriftliche Aufgaben sind mit (S) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** 24. April in den Übungsgruppen.