

1. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, MSc. M. Ritter

SoSe 2019

Aufgabe 1. (S, 6 Punkte) Gegeben seien die folgenden Permutationen in S_6 :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Nach der Vorlesung kann jede Permutation in S_6 als Produkt von höchstens 6 Transpositionen geschrieben werden. Bestimmen Sie solche Darstellungen für $\pi, \pi^{-1}, \sigma, \pi \circ \sigma, \sigma \circ \pi$.
- (b) Bestimmen Sie das Signum aller in (a) betrachteten Permutationen.

Aufgabe 2. (V) Für $\pi \in S_n$ sei $\ell(\pi) := |N(\pi)|$ die Anzahl der Fehlstände von π . Nach Definition gilt also $\ell(\pi) \leq \binom{n}{2} = n(n-1)/2$.

- (a) Bestimmen Sie ein $\pi \in S_n$ mit $\ell(\pi) = n(n-1)/2$ für $n = 2, 3, 4, 5$.
- (b) Analog für n beliebig.

Aufgabe 3. (S, 3 Punkte) Zeigen Sie:
$$\operatorname{sgn}(\pi) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j} \quad \text{für alle } \pi \in S_n.$$

Aufgabe 4. (V) Für $1 \leq i < j \leq n$ sei wie in der Vorlesung $\tau_{ij} \in S_n$ die Transposition, die i und j vertauscht. Zeigen Sie:

- (a) Ist $i = 1$ und $j \geq 3$, so gilt $\tau_{1j} = \tau_{2j} \circ \tau_{12} \circ \tau_{2j}$.
- (b) Ist $1 < i < j \leq n$, so gilt $\tau_{ij} = \tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i}$.

Aufgabe 5. (V) Berechnen Sie, mit der Leibniz-Formel, die Determinanten der folgenden 3×3 -Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{in } M_3(\mathbb{Q}).$$

Aufgabe 6. (Z) Schreiben Sie ein Computer-Programm mit:

Input: Eine Permutation $\pi \in S_n$, gegeben als Liste $[\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)]$.

Output: Eine Liste von Paaren $[[i_1, j_1], [i_2, j_2], \dots, [i_r, j_r]]$, so dass $\pi = \tau_{i_1 j_1} \circ \tau_{i_2 j_2} \circ \dots \circ \tau_{i_r j_r}$ gilt; wobei, wie in der Vorlesung, $\tau_{ij} \in S_n$ die Transposition bezeichnet, die i, j vertauscht und alle anderen Ziffern festlässt.

Empfehlung: Benutzen Sie GAP (<https://www.gap-system.org/>).

Schriftliche Aufgaben sind mit (S) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz.

Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 17. April in den Übungsgruppen.