6. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2022/23

Aufgabe 1. Noch einmal zu Blatt 5, Aufgabe 5: Sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler und V ein G-Modul. Wir bilden dann $V' := \{v \in V \mid h.v = v \text{ für alle } h \in H\} \subseteq V$. In Teil (b) wude gefragt:

(b) Sei $\chi \in \mathrm{CF}_K(G)$ der Charakter von V und $\chi' \in \mathrm{CF}_K(G/H)$ der Charakter von V'. Finden Sie eine Formel, die die Werte von χ' allein durch die Werte von χ bestimmt.

Hinweise dazu: Definiere $\varphi\colon V \to V$ durch $\quad \varphi(v) := \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h.v \quad$ für alle $v \in V$.

(1) Zeigen Sie, dass $V' = \mathrm{Bild}(\varphi)$ gilt und dass dies ein G-Untermodul von V ist.

(2) Zeigen Sie, dass $\varphi^2 = \varphi$ gilt. Schließen Sie daraus $V = \mathrm{Bild}(\varphi) \oplus \mathrm{Kern}(\varphi) = V' \oplus \mathrm{Kern}(\varphi)$.

(3) Sei B_1 eine Basis von V' und B_2 eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$. Nach (2) ist dann $B := B_1 \cup B_2$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass die Matrix $M_B(\varphi)$ von φ bzgl. B eine Diagonalmatrix ist, mit $\dim V'$ Einsen auf der Diagonalen, gefolgt von $\dim V - \dim V'$ Nullen.

(4) Betrachte die Matrixdarstellung $\rho_B\colon V \to V$. Zeigen Sie $\chi'(gH) = \mathrm{Spur}\big(M_B(\varphi)\cdot\rho_B(g)\big)$ für alle $g \in G$. (Beachte: Nach (1) hat $\rho_B(g)$ eine Block-Dreiecksgestalt für alle $g \in G$.) Schließen Sie damit $\chi'(gH) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi(gH)$ für alle $g \in G$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie mit dem in der Vorlesung beschriebenen Algorithmus noch einmal die Charaktertafel von $G = S_3$. Bestimmen Sie also die Matrizen Z_1, Z_2, Z_3 zu den drei Konjugiertenklassen von S_3, finden Sie dann gemeinsame Eigenvektoren etc.

Aufgabe 3. Zur Erinnerung: Für $x, y \in G$ heisst $[x,y] := x^{-1}y^{-1}xy$ der Kommutator von x und y. Ob ein gegebenes Element $g \in G$ ein Kommutator ist, kann mit Hilfe der Charaktertafel von G überprüft werden.

(a) Seien $x, g \in G$ fest; sei C die Konjugiertenklasse von g. Zeigen Sie:

$$\text{Es gibt ein } y \in G \text{ mit } [x,y] \in C \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \frac{|\chi(x)|^2\overline{\chi(g)}}{\chi(1)} \neq 0.$$

(b) Sei $g \in G$ fest. Zeigen Sie: $\quad$ Es gibt $x, y \in G$ mit $g = [x,y] \quad \Leftrightarrow \quad \displaystyle\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(g)}{\chi(1)} \neq 0.$

(c) Zeigen Sie: Jedes Element in der alternierenden Gruppe A_5 ist ein Kommutator.

Bemerkung: O. Ore (1951) hat vermutet, dass in einer endlichen einfachen Gruppe jedes Element ein Kommutator ist. Diese Vermutung wurde erst küzlich bewiesen; siehe

G. Malle, The proof of Ore's conjecture. Séminaire Bourbaki 65ème année, 2012–2013, n° 1069.

Aufgabe 4. ei $R = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über $\mathbb{Z}$ in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$.

(a) Zeigen Sie, dass $f := \sum_{1\leq i,j\leq n, i\neq j} X_i^2 X_j \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ symmetrisch ist und bestimmen Sie ein $g \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $f = g(s_1, \ldots, s_n)$. Behandeln Sie zuerst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

(b) Sei $\Delta := \prod_{1\leq i<j\leq n}(X_i - X_j) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie, dass $\tilde{\pi}(\Delta) = \varepsilon(\pi)\Delta$ für alle $\pi \in S_n$ gilt, wobei $\varepsilon(\pi) = \pm 1$ das Signum von π ist. — Es folgt, dass $\tilde{\pi}(\Delta^2) = \tilde{\pi}(\Delta)^2 = \varepsilon(\pi)^2\Delta^2 = \Delta^2$ für alle $\pi \in S_n$ gilt, also Δ^2 symmetrisch ist.