5. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2022/23

Aufgabe 1. Sei V ein G-Modul mit $n = \dim V < \infty$. Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $\rho\colon G \to M_n(K)$ die zugehörige Matrixdarstellung. Wie in der Vorlesung gezeigt, ist dann auch $M_n(K)$ ein G-Modul, mit Operation gegeben durch

$$g.A = \rho(g) \cdot A \cdot \rho(g)^{\mathrm{tr}} \qquad \text{für alle } g \in G \text{ und } A \in M_n(K).$$

(a) Sei $\mathrm{Sym}_n(K) \subseteq M_n(K)$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen (also aller Matrizen A mit $A^{\mathrm{tr}} = A$). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}_n(K)$ ein G-Untermodul von $M_n(K)$ ist.

(b) Sei $\mathrm{Alt}_n(K) \subseteq M_n(K)$ der Unterraum der anti-symmetrischen Matrizen (also aller Matrizen A mit $A^{\mathrm{tr}} = -A$). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Alt}_n(K)$ ein G-Untermodul von $M_n(K)$ ist.

(c) Sei χ der Charakter von V. Sei χ_S der Charakter von $\mathrm{Sym}_n(K)$ und χ_A der Charakter von $\mathrm{Alt}_n(G)$. Sei außerdem $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie:

$$\chi_S(g) = \frac{1}{2}\big(\chi(g)^2 + \chi(g^2)\big) \qquad \text{und} \qquad \chi_A(g) = \frac{1}{2}\big(\chi(g)^2 - \chi(g^2)\big) \qquad \text{für alle } g \in G.$$

(*Hinweis zu (c):* Weil $\mathrm{char}(K) \neq 2$ gilt, ist $M_n(K) = \mathrm{Sym}_n(K) \oplus \mathrm{Alt}_n(K)$; insbesondere gilt also $\chi = \chi_S + \chi_A$. Außerdem ist $\{E_{ij} + E_{ji} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ eine Basis von $\mathrm{Sym}_n(K)$ und $\{E_{ij} - E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ eine Basis von $\mathrm{Alt}_n(K)$.)

Aufgabe 2. Sei $G = S_4$ und $V = \mathbb{C}^4$ der natürliche Permutationsmodul. (Ist $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis von V, so gilt also $\pi.e_i = e_{\pi(i)}$ für $\pi \in S_4$ und $1 \leq i \leq 4$.) Sei $U_1 \subseteq V$ der Teilraum aller $v \in \mathbb{C}^4$ mit der Eigenschaft, dass die Summe der Komponenten von v gleich 0 ist.

(a) Zeigen Sie, dass $U_1 \subseteq V$ ein Untermodul ist. Sei χ der Charakter von U_1.

(b) Bestimmen Sie die Werte von χ, χ_S und χ_A (wobei χ_S und χ_A wie in Aufgabe 1 definiert sind).

Aufgabe 3. Wir haben die Quaternionengruppe als Gruppe von 2×2-Matrizen $Q_8 \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ definiert. Zeigen, dass diese Matrixdarstellung irreduzibel ist.

Aufgabe 4. Sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler und ψ der Charakter einer Darstellung von G/H. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $\hat{\psi}\colon G \to K$, $g \mapsto \psi(gH)$, der Charakter einer Darstellung von G ist; außerdem: Ist ψ irreduzibel, so auch $\hat{\psi}$.

Aufgabe 5. Sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler und V ein G-Modul.
Wir bilden dann $V' := \{v \in V \mid h.v = v \text{ für alle } h \in H\} \subseteq V$.

(a) Zeigen Sie, dass V' ein G/H-Modul ist, mit Operation: $\quad (G/H) \times V' \to V'$, $(gH, v) \mapsto g.v$.

(b) Sei $\chi \in \mathrm{CF}_K(G)$ der Charakter von V und $\chi' \in \mathrm{CF}_K(G/H)$ der Charakter von V'. Finden Sie eine Formel, die die Werte von χ' allein durch die Werte von χ bestimmt.