4. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2022/23

Aufgabe 1. Es seien $M \in \mathrm{M}_d(\mathbb{Z})$ eine Coxeter-Matrix, $\Gamma = \Gamma(M)$ der zugehörige Graph und $\beta = \beta(M)$ die zugehörige Bilinearform mit Gram-Matrix $B = B(M) = (-\cos(\pi/m_{ij}))_{1\leq i,j\leq d}$.

(a) Es sei nun $d \geq 3$. Es gelte $m_{12} \geq 3$ und $m_{13} = m_{14} = \ldots = m_{1d} = 2$. Es seien $M_1 = (m_{ij})_{2\leq i,j\leq d}$ und $M_2 = (m_{ij})_{3\leq i,j\leq d}$. Zeige:

$$\det(B(M)) = \det(B(M_1)) - \cos^2(\pi/m_{12})\det(B(M_2)).$$

(b) Zeige: Ist Γ ein Coxeter–Dynkin-Diagramm, so ist $\det(B) > 0$. (Benutze die obige Gleichung, um Rekursionsformeln für $\det(B(M))$ aufzustellen.) Verifiziere folgende Tabelle:

$\Gamma(M)$	$\mathbf{A}_n$	$\mathbf{B}_n$	$\mathbf{D}_n$	$\mathbf{I}_2(m)$	$\mathbf{E}_6$	$\mathbf{E}_7$	$\mathbf{E}_8$	$\mathbf{H}_3$	$\mathbf{H}_4$	$\mathbf{F}_4$
$\det(2B(M))$	$n+1$	2	4	$4\sin^2(\pi/m)$	3	2	1	$3-\sqrt{5}$	$(7-3\sqrt{5})/2$	1

(c) Zeige: Ist Γ ein erweitertes Coxeter–Dynkin-Diagramm, so ist $\det(B) \leq 0$. (Verfahre analog.)

Aufgabe 2. Für welche $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, gilt $\cos(2\pi/m) \in \mathbb{Q}$?

Aufgabe 3. Sei G eine endliche Gruppe, $n := |G| < \infty$ und $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Wir betrachten den Polynomring $R = \mathbb{C}[X_{g_1}, \ldots, X_{g_n}]$ in n Variablen, die durch die Elemente von G indiziert sind. Definiere die Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ mit $a_{ij} = X_{g_i g_j}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Die Darstellungstheorie von Gruppen wurde von Frobenius bei dem Versuch erfunden, die Faktorisierung von $\det(A) \in R$ in irreduzible Polynome zu bestimmen.

Versuchen Sie, dieses Problem für folgende Gruppen G zu lösen: zyklische Gruppen der Ordnung 2 oder 3, symmetrische Gruppe S_3.