3. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2022/23

Aufgabe 1. Sei G beliebige Gruppe und $R \subseteq G$. Das Normalteilererzeugnis von R ist dann definiert als $\langle\langle R \rangle\rangle := \bigcap_N N$, wobei N über alle Normalteiler von G mit $R \subseteq N$ läuft.

(a) Zeigen Sie: $\langle\langle R \rangle\rangle = \langle \{grg^{-1} \mid g \in G, r \in R\} \rangle$.
(b) Sei nun $G = \langle x, y \rangle$ mit $x \neq y$, und G frei auf $\{x, y\}$.
  (i) Zeigen Sie: $G' = \langle\langle [x, y] \rangle\rangle$.
  (ii) Gilt $y^2x^2 \in \langle\langle xy \rangle\rangle$?

Aufgabe 2. Sei F eine Gruppe und $S \subseteq F$ Teilmenge mit $F = \langle S \rangle$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) F ist frei auf S.
(b) Ist $n \geq 1$ und sind beliebige $a_1, \ldots, a_n \in S \cup S^{-1}$ gegeben mit $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$ für $1 \leq i \leq n-1$, so gilt stets $a_1 \cdots a_n \neq 1_F$.

Aufgabe 3. Sei $S = \{x, y\}$ mit $x \neq y$ und F freie Gruppe auf S. Sei $T := \{x^n y x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq F$ und $U := \langle T \rangle$ die von T erzeugte Untergruppe von F. Zeigen Sie, dass U frei auf T ist.

Aufgabe 4. (a) Zur Erinnerung: Gegeben seien die folgenden Matrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Dann ist $Q_8 := \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $|Q_8| = 8$, und heißt Quaterniongruppe. Zeigen Sie: $Q_8 \cong \langle x, y \mid x^2y^{-2} = 1, x^4 = 1, xyxy^{-1} = 1 \rangle$.

(b) Zeigen Sie: $A_4 \cong \langle x, y \mid x^3 = 1, y^3 = 1, (xy)^2 = 1 \rangle$.

(c)* Zeigen Sie: $A_5 \cong \langle x, y \mid x^2 = 1, y^3 = 1, (xy)^5 = 1 \rangle$.

Aufgabe 5. Sei W eine Gruppe und $S \subseteq W$ eine Teilmenge mit $W = \langle S \rangle$. Es gelte $s \neq 1$ und $s^2 = 1$ für alle $s \in S$. Dann ist $s^{-1} = s$ für alle $s \in S$ und jedes $1 \neq w \in W$ lässt sich schreiben als $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_m$ mit $m \geq 1$ und $s_i \in S$ für alle i. Ist m minimal mit dieser Eigenschaft, so heißt der Ausdruck $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_m$ "reduziert" und m die Länge von w, geschrieben $m = \ell(w)$. Insbesondere ist $\ell(s) = 1$ für $s \in S$. Für $w = 1$ setzen wir $\ell(1) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\ell(w) = \ell(w^{-1})$ für alle $w \in W$.

(b) Ist $1 \neq w \in W$, so gibt es ein $s \in S$ mit $\ell(sw) = \ell(w) - 1$.

(c) Sind $w \in W$ und $s \in S$, so gilt stets $\ell(w) - 1 \leq \ell(sw) \leq \ell(w) + 1$.

(d) Sei $W = S_n$ und $S = \{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$ wobei $\tau_i = (i\ i{+}1)$ (Transposition) für $1 \leq i \leq n-1$. Zeigen: Ist $\pi \in S_n$ und $1 \leq i \leq n-1$, so gilt $\ell(\tau_i \circ \pi) = \ell(\pi) \pm 1$. Können Sie eine Bedingung finden, mit der man leicht das Vorzeichen bestimmen kann?