2. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2022/23

Aufgabe 1. Dieses Beispiel spielt eine Rolle in der Geometrie und komplexen Analysis. Sei $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ (die obere komplexe Halbebene). Zeigen Sie, dass G auf $\mathcal{H}$ operiert durch die Abbildung

$$G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

(Warum ist $cz + d \neq 0$ und $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$?) Bestimmen Sie Kern(π) für den zugehörigen Homomorphismus $\pi \colon G \to S_{\mathcal{H}}$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $G = \mathrm{SL}_n(K)$. Dann operiert G auf $X = \{\langle v \rangle \mid 0 \neq v \in K^n\}$ (siehe Vorlesung). Wir erhalten also einen zugehörigen Homomorphismus $\pi \colon G \to S_X$.

Sei nun $n = 2$ und K ein endlicher Körper mit $|K| \in \{2, 3, 4\}$. Bestimmen Sie in den drei Fällen jeweils $|X|$, sowie Kern und Bild von π.

Aufgabe 3. Die Gruppe G operiere auf der Menge $X \neq \varnothing$. Die Operation heißt transitiv, wenn es zu beliebigen $x, y \in X$ stets ein $g \in G$ gibt mit $y = g.x$. Allgemeiner: Für $k \geq 1$ heißt die Operation k-fach transitiv, wenn es zu beliebigen, paarweise verschiedenen Elementen $x_1, \ldots, x_k \in X$ und beliebigen, paarweise verschiedenen Elementen $y_1, \ldots, y_k \in X$ stets ein $g \in G$ gibt mit $g.x_i = y_i$ für $1 \leq i \leq k$.

(a) Sei X transitiv und $k \geq 2$. Zeigen Sie: Genau dann ist die G-Operation k-fach transitiv, wenn für ein $x \in X$ die Untergruppe $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$ noch $(k-1)$-transitiv auf $X \setminus \{x\}$ operiert. (Beachte: Nach Definition von G_x operiert G_x auf $X \setminus \{x\}$.)

(b) Zeigen Sie: S_n operiert n-fach transitiv auf $\{1, \ldots, n\}$. Für $n \geq 3$ operiert A_n auf $\{1, \ldots, n\}$ noch $(n-2)$-fach transitiv.

Bemerkung. Mehrfache Transitivität ist eine sehr starke Bedingung. Es gilt der Satz: Die einzigen 4-fach transitiven Gruppen sind S_n $(n \geq 4)$, A_n $(n \geq 6)$ und zwei weitere Gruppen, nämlich die beiden Mathieu-Gruppen $M_{11} \leq S_{11}$ und $M_{23} \leq S_{23}$ (entdeckt um 1861); siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Mathieu_group`.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe. Dann heißt $Z(G) := \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}$ das Zentrum von G.

(a) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist.
(b) Bestimmen Sie $Z(S_n)$ und $Z(\mathrm{GL}_n(K))$, wobei K ein Körper ist.

Aufgabe 5. Sei G eine beliebige Gruppe. Diese Übung dient der Wiederholung einer allgemeinen Konstruktion, die Sie vielleicht schon in einer Algebra-Vorlesung gesehen haben. Für $g, h \in G$ heißt $[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh \in G$ der Kommutator von g, h. Es gilt offenbar $[g, h] = 1 \Leftrightarrow gh = hg$. Die Untergruppe $G' := \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle \leq G$ heißt Kommutator-Untergruppe von G. (Beachte: Es gibt Beispiele, die zeigen, dass die Menge $\{[g,h] \mid g,h \in G\}$ noch keine Untergruppe von G ist.) Zeigen Sie:

(a) G' ist ein Normalteiler von G und die Faktor-Gruppe G/G' ist abelsch.
(b) Ist $N \leq G$ ein beliebiger Normalteiler mit G/N abelsch, so gilt $G' \subseteq N$.
(c) Ist auch H eine Gruppe und $\varphi\colon G \to H$ ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus, so gilt $\varphi(G') = H'$.
(d) Es gilt $S_n' = A_n$ für alle $n \geq 1$.
(e) Ist K ein Körper mit $|K| > 3$, so gilt $\mathrm{SL}_2(K)' = \mathrm{SL}_2(K)$.

Aufgabe 6. Machen Sie sich vertraut mit dem Computer-Algebra-System GAP (dies ist frei verfügbar unter `https://www.gap-system.org`). Eine guten Einstieg liefert das Tutorial unter

`https://www.gap-system.org/Manuals/doc/tut/chap0.html`

Dort wird insbesondere Kapitel 5 zu Gruppen für uns interessant sein.

(a) Lesen Sie in `https://www.gap-system.org/Doc/Examples/rubik.html` wie man Rubiks Zauberwürfel mit GAP untersuchen kann.

(b) Sei $G \leq S_n$, gegeben durch endlich viele erzeugende Elemente. Schreiben Sie ein Programm, welches testet, ob die Operation von G auf $\{1,\ldots,n\}$ transitiv bzw. k-fach transitiv für $k \geq 2$ ist. Testen Sie mit Ihrem Programm die Mathieu-Gruppe M_{11}.