1. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2022/23

Zur gemeinsamen Besprechung in den Übungen am 27.10.

Aufgabe 1. Gegeben seien die folgenden Elemente der Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Ordnungen von A, B und C.
(b) Bestimmen Sie A^{2018}, B^{2018} und C^{-2018}.
(c) Zeigen Sie, dass die Untergruppe $U := \langle A, B\rangle \subseteq G$ unendliche Ordnung hat.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe. Es gelte $G = \langle s, t\rangle$ mit $s, t \neq 1$, $s \neq t$ und $s^2 = t^2 = 1$. Sei $m := o(st) < \infty$. Zeigen Sie: $|G| = 2m$. Eine solche Gruppe heißt "Diedergruppe".

Aufgabe 3. Sei K ein Körper. Zeigen Sie $\mathrm{SL}_2(K) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in K \right\rangle$.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe. Seien $g_1, g_2 \in G$ mit $o(g_1) < \infty$ und $o(g_2) < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $g_1g_2 = g_2g_1$, so ist $o(g_1g_2) \mid \mathrm{kgV}(o(g_1), o(g_2)) < \infty$. Gilt hier im Allgemeinen sogar Gleichheit?

(b) Gilt $g_1g_2 = g_2g_1$ und $\mathrm{ggT}(o(g_1), o(g_2)) = 1$, so ist $o(g_1g_2) = o(g_1)o(g_2) < \infty$.

Geben Sie Beispiele an, die zeigen, dass man auf die Voraussetzung "$g_1g_2 = g_2g_1$" nicht verzichten kann.

Aufgabe 5. Sei $G = S_n$ mit $n \geq 2$. Sei $\tau = (i\ j) \in S_n$ eine Transposition, wobei $1 \leq i < j \leq n$.

(a) Zeigen Sie $(2\ j) \circ (1\ 2) \circ (2\ j) = (1\ j)$ für $j \geq 3$ und $(1\ i) \circ (1\ j) \circ (1\ i) = (i\ j)$ für $j > i > 1$.

(b) Es ist sehr leicht zu sehen, dass $\mathrm{sgn}((1\ 2)) = -1$ ist. Schließen Sie mit (a), dass $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$ gilt. (Oder bestimmen Sie alle Fehlstände von τ.)

(b) Für $1 \leq i \leq n-1$ sei $\tau_i \in S_n$ die Transposition, die i und $i+1$ vertauscht. Zeigen Sie $S_n = \langle \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\rangle$.

Aufgabe 6. Sei $n \geq 3$ und $G = A_n$. Zeigen Sie, dass A_n von 3-Zykeln erzeugt wird. (Hinweis: Schreiben Sie die Doppel-Transposition $(1\ 2) \circ (3\ 4)$ als Produkt von 3-Zykeln in A_4, und finden Sie dann eine allgemeine Regel für A_n.) Ist $n \geq 5$, so zeigen Sie, dass A_n auch von allen Doppel-Transpositionen $(i\ j) \circ (k\ l)$ mit paarweise verschiedenen $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$ erzeugt wird.

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass $V_4 := \{\mathrm{id}, (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3)\}$ ein Normalteiler der alternierenden Gruppe A_4 ist; bestimmen Sie alle Untergruppen von A_4. Zeigen Sie insbesondere, dass es keine Untergruppe der Ordnung 6 gibt. (Dies ist das kleinste Beispiel einer endlichen Gruppe, wo es zu einem Teiler d der Gruppenordnung keine Untergruppe der Ordnung d gibt.)