Schriftliche Hausaufgabe zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2022/23

Die Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Abgabe bis Donnerstag 26.1.2023. in der Vorlesung.

Aufgabe 1. ($12 = 4 + 4 + 4$ Punkte)
Sei F freie Gruppe auf $S = \{x, y\}$. Sei $R \subseteq F$ eine Teilmenge und $N := \langle\langle R\rangle\rangle \subseteq F$ der von R erzeugte Normalteiler. Bestimmen Sie die Ordnung der Faktorgruppe F/N für die folgenden Teilmengen R:

(a) $R := \{x^3, y^3, xyxy\}$, **(b)** $R := \{x^3, y^4, xyx\}$, **(c)** $R := \{x^3, y^4, xyxyx\}$.

Aufgabe 2. ($10 = 5 + 5$ Punkte)
Sei S_4 die symmetrische Gruppe auf $\{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Bestimmen Sie Repräsentanten für die Konjugiertenklassen von S_4.

(b) Bestimmen Sie die Charaktertafel von S_4.

(Hinweis: $\mathrm{sgn}\colon S_4 \to \{\pm 1\}$ definiert einen Charakter vom Grad 1. Zeigen Sie, dass χ_A wie in Ü5A2 ireduzibel ist. Benutzen Sie dann Orthogonalitätsrelationen etc.)

Aufgabe 3. ($12 = 3 + 3 + 3 + 3$ Punkte)
Seien G, H endliche Gruppen. Das direkte Produkt $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ ist dann auch eine Gruppe mit Verknüpfung $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2)$ für $g_1, g_2 \in G$ und $h_1, h_2 \in H$. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Charaktertafel von $G \times H$ zu bestimmen.

(a) Seien $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$. Zeigen Sie: $\chi \circ \pi_1 \in \mathrm{Irr}(G \times H)$ und $\psi \circ \pi_2 \in \mathrm{Irr}(G \times H)$, wobei $\pi_1\colon G \times H \to G$, $(g, h) \mapsto g$, und $\pi_2\colon G \times H \to H$, $(g, h) \mapsto h$, die Projektionsabbildungen sind.

(b) Sind $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$, so definieren wir eine Funktion $\chi \boxtimes \psi\colon G \times H \to \mathbb{C}$ durch

$$(\chi \boxtimes \psi)(g, h) := \chi(g) \cdot \psi(h) \qquad \text{für alle } g \in G \text{ und } h \in H.$$

Zeigen Sie: $\chi \boxtimes \psi$ ist der Charakter einer irreduziblen Darstellung von $G \times H$.

(c) Zeigen Sie: $\mathrm{Irr}(G \times H) = \{\chi \boxtimes \psi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G), \psi \in \mathrm{Irr}(H)\}$.

(d) Bestimmen Sie die Charaktertafel von $S_3 \times H$, wobei H zyklische Gruppe der Ordnung 2 ist.