9. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

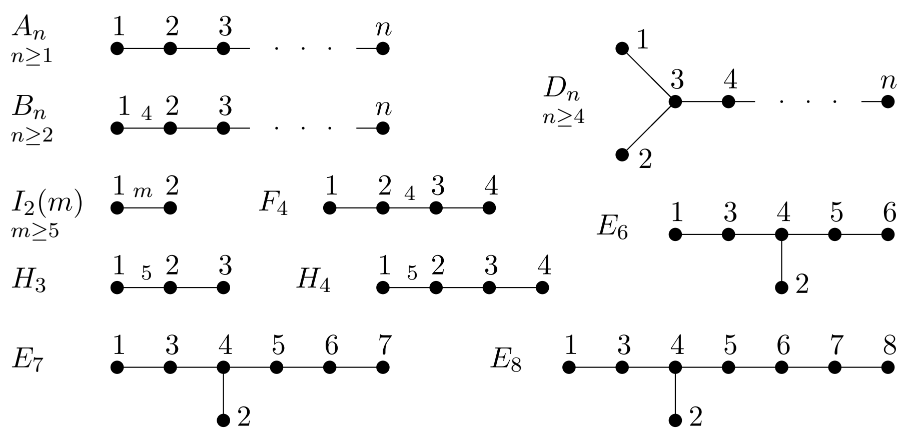
Aufgabe 1. Sei $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq d} \in M_d(\mathbb{R})$ mit $m_{ii} = 1$ und $m_{ij} = m_{ji} \in \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ für $i \neq j$. Sei $B(M) := \big(-\cos(\pi/m_{ij})\big)_{1\leq i,j\leq d} \in M_d(\mathbb{R})$. Sei nun $d \geq 3$. Es gelte

$$m_{12} \geq 3 \qquad \text{und} \qquad m_{13} = m_{14} = \ldots = m_{1d} = 2.$$

Sei $M_1 = (m_{ij})_{2\leq i,j\leq d}$ und $M_2 = (m_{ij})_{3\leq i,j\leq d}$. Zeigen Sie:

$$\det(B(M)) = \det(B(M_1)) - (\cos(\pi/m_{12}))^2 \det(B(M_2)).$$

Betrachten Sie nun die folgenden Graphen



und bilden Sie die jeweils zugehörige Matrix M, wie in der Vorlesung beschrieben. Benutzen Sie die obige Gleichung, um Rekursionsformeln für $\det(B(M))$ aufzustellen und damit zu zeigen, dass in allen Fällen $\det(B(M)) > 0$ gilt. Verifizieren Sie folgende Tabelle:

Graph	A_n	B_n	D_n	$I_2(m)$	H_3	H_4	F_4	E_6	E_7	E_8
$\det(2B(M))$	$n+1$	2	4	$4(\sin(\pi/m))^2$	$3-\sqrt{5}$	$(7-3\sqrt{5})/2$	1	3	2	1

Verfahren Sie analog mit den in der Vorlesung beschriebenen Graphen $\tilde{A}_n$, $\tilde{B}_n$, $\tilde{C}_n$, $\tilde{D}_n$, $\tilde{G}_2$, $\tilde{H}_3$, $\tilde{H}_4$, $\tilde{F}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$, und zeigen Sie, dass für die zugehörigen Matrizen $\det(B(M)) \leq 0$ gilt.

Aufgabe 2. Sei W eine Gruppe, $S \subseteq W$ eine Teilmenge mit $W = \langle S\rangle$ und $o(s) = 2$ für alle $s \in S$. Es gelte die Austauschbedingung (A) für (W, S). Diese Aufgabe enthält eine weitere Anwendung des Lemmas von Matsumoto–Tits. Sei $\mathcal{M}$ die Potenzmenge von W. Wir definieren eine Verknüpfung $*\colon \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ dutch $A * B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$ für $A, B \in \mathcal{M}$. Diese ist offenbar assoziativ, und die Menge $\{1\}$ ist neutrales Element bzgl. $*$. Betrachte nun die Abbildung

$$f\colon S \to \mathcal{M}, \qquad s \mapsto \{1, s\}.$$

(a) Zeigen Sie: Die Voraussetzungen von Matsumoto–Tits sind erfüllt. Also lässt sich f zu einer Abbildung $\hat{f}\colon W \to \mathcal{M}$ fortsetzen.

(b) Für $y, w \in W$ schreiben wir $y \preceq w$, wenn $y \in \hat{f}(w)$ gilt. Insbesondere: $y \preceq w \Rightarrow l(y) \leq l(w)$. Zeigen Sie, dass $\preceq$ eine partielle Ordnung auf W ist, die sogenannte *Bruhat–Chevalley-Ordnung.*

(c) Bestimmen Sie alle $y, w \in W = S_3$ mit $y \preceq w$. Finden Sie Elemente $y, w \in W = S_4$ mit $l(y) < l(w)$ und $y \not\preceq w$.