

8. Übung zu GAGA B — schriftliche Hausaufgabe

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

Die Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Abgabe bis Donnerstag 19.12. in der Vorlesung.

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe. Gegeben seien Untergruppen $B, N \subseteq G$, die ein BN -Paar bilden; sei W die Weyl-Gruppe von G , mit Erzeugermenge $S \subseteq W$. Für jedes $w \in W$ sei $n_w \in N$ ein fester Repräsentant.

(a) Zeigen Sie: Für $s \in S$ ist $P_s := B \cup Bn_sB \subseteq G$ eine Untergruppe von G .

(b) Sei $1 \neq w \in W$ so, dass $B \cup Bn_wB$ eine Untergruppe ist. Zeigen Sie, dass dann $w \in S$ gelten muss.

Aus (a) und (b) folgt also, dass die Erzeugermenge S für W eindeutig bestimmt ist: Es ist genau die Menge aller $1 \neq w \in W$, so dass $B \cup Bn_wB$ eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 2. Sei $W = S_n$ die symmetrische Gruppe mit Erzeugermenge $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$, wobei $\sigma_i = (i, i+1)$ für $1 \leq i \leq n-1$. Für $w \in S_n$ sei $l(w)$ die Länge von w .

(a) Sei $1 \leq i \leq n-1$ und $w \in S_n$. Zeigen Sie: Es gilt $l(\sigma_i w) > l(w) \Leftrightarrow w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$.

(b) Sei $w \in S_n$. Schließen Sie aus (a), dass $l(w) = |\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ und } w(i) > w(j)\}|$ die Anzahl der Fehlstände von w ist.

(c) Versuchen Sie, eine komplette Liste von reduzierten Ausdrücken für die $n!$ Elemente von S_n hinzuschreiben; insbesondere sollte also auch ein reduzierter Ausdruck für die Permutation mit den meisten Fehlständen in Aufgabe 1 auf Übungsblatt 2 vorkommen. (Es mag helfen, zuerst die Fälle $n = 3, 4$ zu betrachten.)

[*Hinweis zu (a):* Man kann versuchen, dies direkt zu zeigen. Alternativ findet man die Bedingung " $w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$ " auch im Beweis des Satzes über das BN -Paar in $GL_n(K)$. Kombinieren Sie dies mit der Bedingung " $l(\sigma_i w) > l(w)$ " in der Bruhat-Zerlegung. *Zu (c):* Benutzen Sie eine Induktion nach n , wobei man geeignete Nebenklassenvertreter von S_{n-1} in S_n benötigt; siehe dazu §2 der Vorlesung.]

Aufgabe 3. Arbeiten Sie Aufgabe 3 auf Übungsblatt 7 (BN -Paar mit einer unendlichen Weyl-Gruppe) schriftlich aus.