7. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe. Gegeben seien Untergruppen $B, N \subseteq G$, die ein BN-Paar bilden.

Sei $Z \subseteq G$ ein Normalteiler mit $Z \subseteq B$. (Zum Beispiel ist $Z := \bigcap_{g \in G} gBg^{-1}$ stets ein solcher Normalteiler – warum?) Sei $\bar{G} = G/Z$. Zeigen Sie: Die Untergruppen $\bar{B} := B/Z$ und $\bar{N} := ZN/Z$ bilden ein BN-Paar in $\bar{G}$; die kanonische Abbildung $N \to \bar{N}$ induziert einen Isomorphismus von W auf die Weyl-Gruppe von $\bar{G}$.

Damit folgt, dass auch $\mathrm{PGL}_n(K) := \mathrm{GL}_n(k)/Z(\mathrm{GL}_n(K))$ eine Gruppe mit einem BN-Paar ist.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe. Gegeben seien Untergruppen $B, N \subseteq G$, die ein BN-Paar bilden; sei W die Weyl-Gruppe von G, mit Erzeugermenge $S \subseteq W$.

(a) Sei $w \in W$ und $s \in S$ mit $l(sw) < l(w)$. Zeigen Sie: $n_s \in Bn_wBn_w^{-1}B$.

(b) Zeigen Sie $N_G(B) = B$. (Für eine beliebige Untergruppe $U \leq G$ heißt $N_G(U) := \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\}$ der Normalisator von U in G; es gilt immer $U \subseteq N_G(U)$.)

(c) Sei $Z(G)$ das Zentrum von G. Zeigen Sie $Z(G) \subseteq B$ (und damit dann auch $Z(G) \subseteq \bigcap_{g \in G} gBg^{-1}$).

[*Hinweis zu (b):* Sei $g \in N_G(B)$ und schreibe $g = bn_wb'$ mit $b, b' \in B$ und $w \in W$. Wäre $w \neq 1$, so wähle $s \in S$ mit $l(sw) < l(w)$ und wende dann (a) an.]

Aufgabe 3. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, ein BN-Paar mit einer unendlichen Weyl-Gruppe zu konstruieren. Dazu betrachten wir den Polynomring $A = k[t]$ wobei k ein Körper ist und t eine Unbestimmte. Sei $K = k(t)$ der Quotientenkörper von A. Wir definieren eine Abbildung $\nu\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ wie folgt: Es sei $\nu(0) = \infty$. Für $0 \neq x \in K$ schreibe $x = f/g$ mit $0 \neq f, g \in A$. Dann gilt $f = t^a f_0$ et $g = t^b g_0$, wobei $a, b \geq 0$ und die konstanten Terme von $f_0, g_0 \in A$ ungleich 0 sind. In diesem Fall sei $\nu(x) := a - b$. Sei nun $G = \mathrm{SL}_2(K)$. Zeigen Sie:

(a) ν ist wohl-definiert, $\mathcal{O} := \{x \in K \mid \nu(x) \geq 0\}$ ist ein Teilring von K und $\mathfrak{m} := \{x \in K \mid \nu(x) > 0\} = (t)$ ist das eindeutige maximale Ideal von $\mathcal{O}$. (D.h., $\mathcal{O}$ ist ein **lokaler Ring**.)

(b) Die folgenden Mengen sind Untergruppen von G:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, d \in \mathcal{O}, c \in \mathfrak{m}, ad - bc = 1 \right\} \subseteq G,$$

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \neq a, b \in K \right\} \subseteq G.$$

(c) $H = B \cap N$ ist ein Normalteiler von N und $W = N/H$ ist eine unendliche Diedergruppe, erzeugt von den Nebenklassen s, s' der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Untergruppen B und N bilden ein BN-Paar in G, mit Weyl-Gruppe $W = \langle s, s' \rangle$.