6. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

Es sei stets V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K, und $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

Aufgabe 1. Sei $0 \neq r \in V$ mit $\beta(r,r) \neq 0$. Definiere eine lineare Abbildung $\rho_r\colon V \to V$ durch

$$\rho_r(v) = v - 2\frac{\beta(r,v)}{\beta(r,r)}r \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Dann heißt ρ_r die *Spiegelung* mit Wurzel r. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\rho_r^2 = \mathrm{id}_V$ und $\beta\big(\rho_r(v), \rho_r(w)\big) = \beta(v,w)$ für alle $v, w \in V$.
(b) Sei $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v,w)$ für alle $v, w \in V$. Dann gilt $\varphi \circ \rho_r \circ \varphi^{-1} = \rho_{\varphi(r)}$.
(c) ρ_r ist diagonalisierbar mit $\dim V - 1$ Eigenwerten gleich 1 und einem Eigenwert gleich -1.

Aufgabe 2. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform mit Gram-Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -\cos(\pi/m) \\ -\cos(\pi/m) & 1 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ von V. Sei $m \geq 2$ und seien $\sigma_1, \sigma_2\colon V \to V$ die durch die beiden folgenden Matrizen definierten linearen Abbildungen:

$$\sigma_1 : \begin{bmatrix} -1 & 2\cos(\pi/m) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \sigma_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\cos(\pi/m) & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: σ_1, σ_2 sind Spiegelungen bezüglich β (mit welchen zugehörigen Wurzeln?).
(b) Ist β positiv-definit, d.h., gilt $\beta(v,v) > 0$ für alle $0 \neq v \in V$?
(c) Zeigen Sie, dass $W = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \subseteq \mathrm{GL}(V)$ eine Diedergruppe der Ordnung $2m$ ist.

Aufgabe 3. Sei β nicht-ausgeartet. Eine Abbildung $Q\colon V \to K$ heißt *quadratische Form* (bezüglich β) wenn $\beta(sv) = s^2\beta(v)$ und $Q(v+w) = Q(v) + Q(w) + \beta(v,w)$ für alle $v, w \in V$ und $s \in K$ gilt. Wir definieren dann

$$\Omega(V,Q) := \{\varphi \in \mathrm{End}(V) \mid Q\big(\varphi(v)\big) = Q(v) \text{ für alle } v \in V\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Omega(V,Q)$ eine Untergruppe von $\Gamma(V,\beta)$ ist.
(a) Zeigen Sie: Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so ist Q durch β eindeutig bestimmt und $\Omega(V,Q) = \Gamma(V,\beta)$.
(c) Sei nun $\mathrm{char}(K) = 2$ und $V = K^n$. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standard-Basis von V und $G \in M_n(K)$ die zugehörige Gram-Matrix von β. Sei $P = [p_{ij}] \in M_n(K)$ beliebig mit $G = P + P^{\mathrm{tr}}$. Zeigen Sie: Die Abbildung $Q_P\colon K^n \to K$ definiert durch

$$Q_P(v) := \sum_{1 \leq i,j \leq n} p_{ij}x_ix_j \qquad \text{für} \qquad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n$$

ist eine quadratische Form bezüglich β.
Bestimmen Sie $\Omega(K^2, Q_P)$ für $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Gilt $\Omega(K^2, Q_P) = \Gamma(K^2, \beta)$?

Diese Aufgabe deutet an, dass man für $\mathrm{char}(K) = 2$ noch weitere echte Untergruppen von $\Gamma(V,\beta)$ erhält, die sich am Ende wiederum (bis auf wenige Ausnahmen) als quasi-einfach herausstellen.