5. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

Aufgabe 1. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und V^* der Dualraum. Wir betrachten das kartesische Produkt $W := \{(v,\lambda) \mid v \in V, \lambda \in V^*\}$, welches wiederum ein K-Vektorraum ist. Definiere eine Abbildung $\beta\colon W \times W \to K$ durch

$$\beta\big((v,\lambda),(v',\lambda')\big) := \lambda(v') - \lambda'(v).$$

Zeigen Sie, dass β eine nicht-ausgeartete alternierende Bilinearform ist.

Aufgabe 2. Sei $m \geq 1$ und $X_m := \{1, 2, \ldots, m\}$. Sei V_m die Menge aller Teilmengen $Y \subseteq X_m$ mit $|Y|$ gerade. Wir definieren eine Verknüpfung $+$ auf V_m durch

$$Y_1 + Y_2 := (Y_1 \cup Y_2) \setminus (Y_1 \cap Y_2) \qquad \text{(“symmetrische Differenz”)}.$$

(Beachten Sie, dass $Y_1 + Y_2$ tatsächlich wieder eine gerade Anzahl von Elementen enthält.) Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Wir definieren eine skalare Multplikation $\mathbb{F}_2 \times V_m \to V_m$ durch $0.Y := \varnothing$ und $1.Y = Y$.

(a) Zeigen Sie, dass V_m mit den obigen Verknüpfungen ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ wird. Bestimmen Sie $\dim V_m$ sowie eine Basis von V_m.

(b) Wir definieren $\beta_m\colon V_m \times V_m \to \mathbb{F}_2$ durch $\beta_m(Y_1, Y_2) := \begin{cases} 0 & \text{falls } |Y_1 \cap Y_2| \text{ gerade,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$
Zeigen Sie, dass β_m eine alternierende Bilinearform ist. Bestimmen Sie die Gram-Matrix von β_m bezüglich einer geeigneten Basis von V_m. Zeigen Sie, dass β_m genau dann nicht-ausgeartet ist, wenn m ungerade ist.

(c) Sei nun m gerade. Zeigen Sie, dass $\dim(V_m^\perp) = 1$ gilt; bestimmen Sie einen Basisvektor von $V_m^\perp$. Sei $V_m' := V_m/V_m^\perp$ und $\beta_m'\colon V_m' \times V_m' \to \mathbb{F}_2$ definiert durch $\beta_m'(Y_1 + V_m^\perp, Y_2 + V_m^\perp) := \beta_m(Y_1, Y_2)$ für alle $Y_1, Y_2 \in V_m$. Zeigen Sie, dass β_m' wohl-definiert und nicht-ausgeartet ist.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 1$ und $m = 2n$. Dann bilde $V_m' = V_{2n}'$ und $\beta_m' = \beta_{2n}'$ wie in Aufgabe 2. Wir betrachten nun auch die symmetrische Gruppe S_{2n}. Für $\sigma \in S_{2n}$ definiere $\pi_\sigma\colon V_{2n}' \to V_{2n}'$ durch $\pi_\sigma(Y + V_m^\perp) := \{\sigma(y) \mid y \in Y\} + V_m^\perp$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\pi_\sigma\colon V_{2n}' \to V_{2n}'$ ist wohl-definiert, linear und bijektiv, also $\pi_\sigma \in \mathrm{GL}(V_{2n}')$.

(b) Es gilt sogar $\pi_\sigma \in \mathrm{Sp}(V_{2n}', \beta_{2n}')$.

(c) Für $n \neq 2$ ist die Abbildung $\pi\colon S_{2n} \to \mathrm{Sp}(V_{2n}', \beta_{2n}')$, $\sigma \mapsto \pi_\sigma$, ein injektiver Gruppen-Homomorphismus.

Aus (a), (b), (c) folgt also, dass S_{2n} isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Sp}(V_{2n}', \beta_{2n}')$ ist. Zeigen Sie als Spezialfall, dass $S_6 \cong \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$ gilt, und damit insbesondere $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$ nicht einfach ist.

Aufgabe 4. Sei $\beta\colon V \times V \to K$ eine nicht-ausgeartete reflexive Bilinearform. Sei $\varphi \in \Gamma(V, \beta)$ und $U \subseteq V$ ein Teilraum mit $\varphi(U) \subseteq U$. Zeigen Sie: Es gilt auch $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Aufgabe 5. Sei $\dim V \geq 2$ und $\beta\colon V \times V \to K$ eine nicht-ausgeartete, alternierende Bilinearform. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $Z(\mathrm{Sp}(V, \beta)) = \{\pm \mathrm{id}_V\}$ gilt. Sei also $\varphi \in Z(\mathrm{Sp}(V, \beta))$. Gehen Sie wie folgt vor, um $\varphi = \pm \mathrm{id}_V$ zu zeigen:

(a) Sei $0 \neq w \in V$. Wie in Ü4A5(b) erhalten wir eine Transvektion $\tau \in \mathrm{Sp}(V, \beta)$ mit $\tau(v) = v + \beta(w, v)w$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie damit: Ist $\beta(w, v) = 0$, so folgt auch $\beta(w, \varphi(v)) = 0$.

(b) Mit (a) folgt: Ist $w \in V$, so gilt $\varphi(\langle w \rangle^{\perp}) \subseteq \langle w \rangle^{\perp}$. Schließen Sie daraus nun, dass auch $\varphi(w) \subseteq \langle w \rangle$ gilt. (Hinweis: Aufgabe 4 mit $U = \langle w \rangle^{\perp}$.)

(c) Aus (b) folgt: Ist $w \in V$, so gilt $\varphi(w) = c_w w$ mit einem $c_w \in K$. Zeigen Sie schließlich, dass c_w nicht von w abhängt und gleich ± 1 ist.