4. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

Sei stets V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Zur Erinnerung: Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ heißt Transvektion (oder "Scherung" in der Elementargeometrie), wenn es ein $0 \neq \lambda \in V^*$ und ein $u \in \ker(\lambda)$ gibt mit $\varphi(v) = v + \lambda(v)u$ für alle $v \in V$. (In der Literatur wird die Identität oft nicht als Transvektion bezeichnet.)

Aufgabe 1. Sei $\dim V \geq 1$ und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(a) φ ist eine Transvektion.
(b) Es gibt eine Hyperebene $H \subseteq V$ (d.h., einen Teilraum $H \subseteq V$ mit $\dim H = \dim V - 1$) mit $\varphi|_H = \mathrm{id}_H$ und $\varphi(v) - v \in H$ für alle $v \in V$.
(c) $\varphi - \mathrm{id}$ ist nilpotent und hat Rang ≤ 1.

Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie das characteristische Polynom, das Minimalpolynom sowie die Jordan-Normalform einer Transvektion.
(b) Schließen Sie, dass die Menge der Transvektionen $\neq \mathrm{id}$ eine Konjugiertenklasse in $\mathrm{GL}(V)$ bildet.
(c) Zeigen Sie: Für $\dim V \geq 3$ gilt die Aussage in (b) auch für $\mathrm{SL}(V)$ anstelle von $\mathrm{GL}(V)$.

Aufgabe 3. (a) Sei $U \subsetneq V$ ein Teilraum und $v \in V \setminus U$. Sei $\psi\colon U \to U$ eine Transvektion. Zeigen Sie, dass es eine Transvektion $\varphi\colon V \to V$ gibt mit $\varphi(U) \subseteq U$, $\varphi|_U = \psi$ und $\varphi(v) = v$.

(b) Seien $u, v \in V$ so dass (u, v) linear uabhängig ist. Zeigen Sie, dass es eine Transvektion $\varphi\colon V \to V$ gibt mit $\varphi(u) = v$.

Aufgabe 4. Hier sollen einige Begriffe wiederholt werden, die vielleicht nicht in dieser Allgemeinheit in der Linearen Algebra behandelt wurden. Sei $\beta\colon V \times V \to K$ eine reflexive Bilinearform. Für einen Teilraum $U \subseteq V$ sei $U^\perp := \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$. Offenbar ist $U^\perp$ auch ein Teilraum von V. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist β nicht-ausgeartet, wenn $V^\perp = \{0\}$ gilt.
(b) Es gilt immer $\dim U^\perp \geq \dim V - \dim U$; Gleichheit gilt dann, wenn β nicht-ausgeartet ist.
(c) Genau dann ist $U \cap U^\perp = \{0\}$, wenn die Einschränkung von β auf U nicht-ausgeartet ist. In diesem Fall gilt $V = U \oplus U^\perp$ (direkte Summe).

Aufgabe 5. Sei $\beta\colon V \times V \to K$ eine nicht-ausgeartete, reflexive Bilinearform. Wie in §1 sei $\Gamma(V, \beta)$ die Gruppe aller $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v, w)$ für alle $v, w \in V$. Zeigen Sie:

(a) Sei β symmetrisch. Gibt es eine Transvektion $\mathrm{id} \neq \varphi \in \Gamma(V, \beta)$, so hat K Charakteristik 2.
(b) Sei β alternierend. Für $0 \neq w \in W$ und $0 \neq c \in K$ definiere eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ durch $\varphi(v) := v + c\beta(w, v)w$ für alle $v \in V$. Dann ist $\varphi \in \Gamma(V, \beta)$ und φ ist eine Transvektion. Umgekehrt sind alle Transvektionen $\neq \mathrm{id}$ in $\Gamma(V, \beta)$ von dieser Form.