3. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

Aufgabe 1. Sei G eine beliebige Gruppe. Diese Übung dient der Wiederholung einer allgemeinen Konstruktion, die Sie vielleicht schon in einer Algebra-Vorlesung gesehen haben. Für $g, h \in G$ heißt $[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh \in G$ der Kommutator von g, h. Es gilt offenbar $[g, h] = 1 \Leftrightarrow gh = hg$. Die Untergruppe $G' := \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle \leq G$ heißt Kommutator-Untergruppe von G. (Beachte: Es gibt Beispiele, die zeigen, dass die Menge $\{[g, h] \mid g, h \in G\}$ noch keine Untergruppe von G ist.) Zeigen Sie:

(a) G' ist ein Normalteiler von G und die Faktor-Gruppe G/G' ist abelsch.
(b) Ist $N \leq G$ ein beliebiger Normalteiler mit G/N abelsch, so gilt $G' \subseteq N$.
(c) Ist auch H eine Gruppe und $\varphi\colon G \to H$ ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus, so gilt $\varphi(G') = H'$.
(d) Es gilt $S_n' = A_n$ für alle $n \geq 1$.
(e) Ist K ein Körper mit $|K| > 3$, so gilt $\mathrm{SL}_2(K)' = \mathrm{SL}_2(K)$.

Aufgabe 2. Sei G beliebige Gruppe und $R \subseteq G$. Das Normalteilererzeugnis von R ist dann definiert als $\langle\langle R \rangle\rangle := \bigcap_N N$, wobei N über alle Normalteiler von G mit $R \subseteq N$ läuft.

(a) Zeigen Sie: $\langle\langle R \rangle\rangle = \langle \{grg^{-1} \mid g \in G, r \in R\} \rangle$.
(b) Sei nun $G = \langle x, y \rangle$ mit $x \neq y$, und G frei auf $\{x, y\}$.
  (i) Zeigen Sie: $G' = \langle\langle [x, y] \rangle\rangle$.
  (ii) Gilt $y^2x^2 \in \langle\langle xy \rangle\rangle$?

Aufgabe 3. Sei F eine Gruppe und $S \subseteq F$ Teilmenge mit $F = \langle S \rangle$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) F ist frei auf S.
(b) Ist $n \geq 1$ und sind beliebige $a_1, \ldots, a_n \in S \cup S^{-1}$ gegeben mit $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$ für $1 \leq i \leq n-1$, so gilt stets $a_1 \cdots a_n \neq 1_F$.

Aufgabe 4. Sei $S = \{x, y\}$ mit $x \neq y$ und F freie Gruppe auf S. Sei $T := \{x^n y x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq F$ und $U := \langle T \rangle$ die von T erzeugte Untergruppe von F. Zeigen Sie, dass U frei auf T ist.

Aufgabe 5. (a) Zur Erinnerung: Gegeben seien die folgenden Matrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Dann ist $Q_8 := \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $|Q_8| = 8$, und heißt Quaterniongruppe. Zeigen Sie: $Q_8 \cong \langle x, y \mid x^2y^{-2} = 1, x^4 = 1, xyxy^{-1} = 1 \rangle$.

(b) Zeigen Sie: $A_4 \cong \langle x, y \mid x^3 = 1, y^3 = 1, (xy)^2 = 1 \rangle$.

(c)* Zeigen Sie: $A_5 \cong \langle x, y \mid x^2 = 1, y^3 = 1, (xy)^5 = 1 \rangle$.