2. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

Aufgabe 1. Eine Permutation $\pi \in S_n$ hat höchstens $\frac{1}{2}n(n-1)$ Fehlstände. Geben Sie ein π an, wo diese Höchstzahl erreicht wird. Zeigen Sie, dass dieses π eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2. Sei $n \geq 3$ und $G = A_n$. Zeigen Sie, dass A_n von 3-Zykeln erzeugt wird. (Hinweis: Schreiben Sie die Doppel-Transposition $(1\ 2) \circ (3\ 4)$ als Produkt von 3-Zykeln in A_4, und finden Sie dann eine allgemeine Regel für A_n.) Ist $n \geq 5$, so zeigen Sie, dass A_n auch von allen Doppel-Transpositionen $(i\ j) \circ (k\ l)$ mit paarweise verschiedenen $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$ erzeugt wird.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie das Zentrum $Z(G)$ wobei G eine der folgende Gruppen ist: S_n, A_n, $\mathrm{GL}_n(K)$ und $\mathrm{SL}_n(K)$ (mit K Körper).

Aufgabe 4. Dieses Beispiel spielt eine Rolle in der Geometrie und komplexen Analysis. Sei $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ (die obere komplexe Halbebene). Zeigen Sie, dass G auf $\mathcal{H}$ operiert durch die Abbildung

$$G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z\right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

(Warum ist $cz + d \neq 0$ und $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$?) Bestimmen Sie Kern(π) für den zugehörigen Homomorphismus $\pi\colon G \to S_{\mathcal{H}}$.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper und $G = \mathrm{SL}_n(K)$. Dann operiert G auf $X = \{\langle v \rangle \mid 0 \neq v \in K^n\}$ (siehe Vorlesung). Wir erhalten also einen zugehörigen Homomorphismus $\pi\colon G \to S_X$.

Sei nun $n = 2$ und K ein endlicher Körper mit $|K| \in \{2, 3, 4\}$. Bestimmen Sie in den drei Fällen jeweils $|X|$, sowie Kern und Bild von π.

Aufgabe 6. Die Gruppe G operiere auf der Menge $X \neq \varnothing$. Die Operation heißt transitiv, wenn es zu beliebigen $x, y \in X$ stets ein $g \in G$ gibt mit $y = g.x$. Allgemeiner: Für $k \geq 1$ heißt die Operation k-fach transitiv, wenn es zu beliebigen, paarweise verschiedenen Elementen $x_1, \ldots, x_k \in X$ und beliebigen, paarweise verschiedenen Elementen $y_1, \ldots, y_k \in X$ stets ein $g \in G$ gibt mit $g.x_i = y_i$ für $1 \leq i \leq k$.

(a) Sei X transitiv und $k \geq 2$. Zeigen Sie: Genau dann ist die G-Operation k-fach transitiv, wenn für ein $x \in X$ die Untergruppe $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$ noch $(k-1)$-transitiv auf $X \setminus \{x\}$ operiert. (Beachte: Nach Definition von G_x operiert G_x auf $X \setminus \{x\}$.)

(b) Zeigen Sie: S_n operiert n-fach transitiv auf $\{1, \ldots, n\}$. Für $n \geq 3$ operiert A_n auf $\{1, \ldots, n\}$ noch $(n-2)$-fach transitiv.

Bemerkung. Mehrfache Transitivität ist eine sehr starke Bedingung. Es gilt der Satz: Die einzigen 4-fach transitiven Gruppen sind S_n $(n \geq 4)$, A_n $(n \geq 6)$ und vier weitere Gruppen, von denen die kleinste die in der Vorlesung erwähnte Gruppe M_{11} ist (entdeckt von É. Mathieu 1861); siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Mathieu_group`.

Aufgabe 7. Machen Sie sich vertraut mit dem Computer-Algebra-System GAP (dies ist frei verfügbar unter `https://www.gap-system.org`). Eine guten Einstieg liefert das Tutorial unter

`https://www.gap-system.org/Manuals/doc/tut/chap0.html`

Dort wird insbesondere Kapitel 5 zu Gruppen für uns interessant sein.

(a) Lesen Sie in `https://www.gap-system.org/Doc/Examples/rubik.html` wie man Rubiks Zauberwürfel mit GAP untersuchen kann.

(b) Sei $G \leq S_n$, gegeben durch endlich viele erzeugende Elemente. Schreiben Sie ein Programm, welches testet, ob die Operation von G auf $\{1, \ldots, n\}$ transitiv bzw. k-fach transitiv für $k \geq 2$ ist. Testen Sie mit Ihrem Programm die Mathieu-Gruppe M_{11}.