12. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

Aufgabe 1. Sei G eine endliche Gruppe.

(a) Die Gruppe G operiert auf sich selbst durch Konjugation. Bestimmen Sie den Charakter des zugehörigen Permutationsmoduls.

(b) Zeigen Sie: Die Summe der Einträge in einer Zeile der Charaktertafel von G ist in $\mathbb{N}_0$.

Aufgabe 2. Sei G eine endliche Gruppe und $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Darstellung mit Charakter χ.

(a) Zeigen Sie, dass $N := \{g \in G \mid \rho(g) = \lambda I_n \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}\}$ ein Normalteiler von G ist. Zeigen Sie außerdem: Für $g \in G$ gilt $g \in N \Leftrightarrow \chi(1) = |\chi(g)|$.

(b) Sei $g \in G$ und $d := o(g) \geq 1$. Zeigen Sie: Das charakteristische Polynom von $\rho(g)$ ist durch die Werte $\chi(g^i)$ für $0 \leq i \leq d-1$ bestimmt. (Hinweis: Betrachten Sie die Eigenwerte von $\rho(g)$.)

Aufgabe 3. Sei G eine endliche Gruppe, in der es ein Element $t \in G$ der Ordnung 2 gibt. Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ beliebig.

(a) Zeigen Sie, dass $\chi(t) \in \mathbb{Z}$ gilt. Ist $\chi(1) = 2$, welches sind die Möglichkeiten für $\chi(t)$? (Betrachten Sie die Eigenwerte von $\rho(t)$, wobei $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Darstellung mit Charakter χ ist.)

(b) Sei G nicht-abelsch und einfach. Zeigen Sie: Ist χ nicht der triviale Charakter, so gilt $\chi(1) > 2$.

Aufgabe 4. Sei G eine endliche, nicht-abelsche, einfache Gruppe, in der es ein Element $t \in G$ der Ordnung 2 gibt mit $|C_G(t)| = 4$. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass $G \cong A_5$ gilt.

(a) Sei C die Konjugiertenklasse von t und betrachten Sie die in der Vorlesung definierte Funktion $\alpha_{C,C}\colon G \to \mathbb{C}$, also $\alpha_{C,C}(g) = |\{(x,y) \in C \times C \mid xy = g\}|$ für $g \in G$. Sei nun $g = t$. Zeigen Sie: Sind $x, y \in C$ mit $t = xy$, so folgt $x, y \in C_G(t)$; schließen Sie damit, dass $\alpha_{C,C}(t) \leq 2$ gilt. — Können Sie den genauen Wert von $\alpha_{C,C}(t)$ bestimmen?

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Spalten-Orthogonalität der Charaktertafel, dass es genau 4 irreduzible Charaktere $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ von G gibt mit Wert ± 1 auf t, und alle anderen irreduziblen Charaktere haben Wert 0 auf t. (Wie oft kommen die Werte $+1$ und -1 jeweils vor?) Schließen Sie weiterhin:

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(t)^3}{\chi(1)} = \sum_{1 \leq i \leq 4} \frac{\pm 1}{\chi_i(1)} > \frac{1}{3}.$$

(c) Kombinieren Sie nun (a) und (b) mit der Charakterformel für $\alpha_{C,C}$ um zu zeigen, dass $|G| < 96$ gilt. Versuchen Sie anschließend, die diversen Terme in obigen Abschätzungen zu präzisieren um zu schließen, dass $|G| = 60$ und damit $G \cong A_5$ gelten muss.

Bemerkung. Obige Übung ist ein Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes, nämlich: Sei G eine endliche, nicht-abelsche, einfache Gruppe. Nach dem Satz von Feit–Thompson ist $|G|$ gerade; nach dem Satz von Cauchy gibt es also ein $t \in G$ der Ordnung 2. Sei $n = |C_G(t)|$.

Dann besagt der **Satz von Brauer–Fowler** (1955), dass G isomorph zu einer Untergruppe von S_{n^2-1} ist, es damit nur endlich viele Möglichkeiten für G (bis auf Isomorphie) gibt. — Die obige Übung zeigt also, dass es im Fall $n = 4$ sogar nur genau eine Möglichkeit gibt.