11. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

Sie stets G eine endliche Gruppe; alle Darstellungen und G-Moduln seien endlich-dimensional und über dem Grundkörper $K = \mathbb{C}$.

Aufgabe 1. Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\lambda(1) = 1$, so gilt $\chi \cdot \lambda \in \mathrm{Irr}(G)$.

Aufgabe 2. Wir bilden das direkte Produkt $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ mit einer weiteren endlichen Gruppe H.

(a) Sind $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$, so definieren wir eine Funktion $\chi \boxtimes \psi \colon G \times H \to \mathbb{C}$ durch

$$(\chi \boxtimes \psi)(g, h) := \chi(g) \cdot \psi(h) \qquad \text{für alle } g \in G \text{ und } h \in H.$$

Zeigen Sie $\chi \boxtimes \psi \in \mathrm{Irr}(G \times H)$.

(b) Zeigen Sie $\mathrm{Irr}(G \times H) = \{\chi \boxtimes \psi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G), \psi \in \mathrm{Irr}(H)\}$.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie: Ist $N \subseteq G$ ein Normalteiler und $\sigma \colon G/N \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine irreduzible Matrixdarstellung, so ist auch $\hat{\sigma} \colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $g \mapsto \sigma(gN)$, eine irreduzible Matrixdarstellung.

(b) Verwenden Sie (a), um die Charaktertafeln der Quaternionengruppe Q_8, der Diedergruppe D_8 der Ordnung 8 und der alternierenden Gruppe A_4 zu bestimmen. (Die beiden Gruppen Q_8, D_8 haben einen Normalteiler der Ordnung 2, die Gruppe A_4 hat einen Normalteiler der Ordnung 4.)

Aufgabe 4. Sei $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ und seien $C_1, \ldots, C_r$ die Konjugiertenklassen von G. Sei $X(G) = \big(\chi_i(g_j)\big)_{1 \leq i,j, \leq r} \in M_r(\mathbb{C})$ die Charaktertafel von G, wobei jeweils ein $g_j \in C_j$ fest gewählt ist für $1 \leq j \leq r$. Zeigen Sie:

$$\overline{\det X(G)} = \pm \det X(G) \qquad \text{und} \qquad (\det X(G))^2 = \pm \frac{|G|^r}{|C_1| \cdot |C_2| \cdots |C_r|}.$$

Finden Sie jeweils Beispiele mit $(\det X(G))^2 > 0$ bzw. $(\det X(G))^2 < 0$.