# 10. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

Sie stets $G$ eine Gruppe und $K$ ein Körper; alle $G$-Moduln sind Vektorräume über $K$.

**Aufgabe 1.** Sei $V$ ein $G$-Modul mit $n = \dim V < \infty$. Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $V$ und $\rho\colon G \to M_n(K)$ die zugehörige Matrixdarstellung. Wie in §6 gezeigt, ist dann auch $M_n(K)$ ein $G$-Modul, mit Operation gegeben durch

$$g.A = \rho(g) \cdot A \cdot \rho(g)^{\mathrm{tr}} \qquad \text{für alle } g \in G \text{ und } A \in M_n(K).$$

(a) Sei $\mathrm{Sym}_n(K) \subseteq M_n(K)$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen (also aller Matrizen $A$ mit $A^{\mathrm{tr}} = A$). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}_n(K)$ ein $G$-Untermodul von $M_n(K)$ ist.

(b) Sei $\mathrm{Alt}_n(K) \subseteq M_n(K)$ der Unterraum der anti-symmetrischen Matrizen (also aller Matrizen $A$ mit $A^{\mathrm{tr}} = -A$). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Alt}_n(K)$ ein $G$-Untermodul von $M_n(K)$ ist.

(c) Sei $\chi$ der Charakter von $V$. Sei $\chi_S$ der Charakter von $\mathrm{Sym}_n(K)$ und $\chi_A$ der Charakter von $\mathrm{Alt}_n(G)$. Sei ausserdem $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie:

$$\chi_S(g) = \frac{1}{2}\big(\chi(g)^2 + \chi(g^2)\big) \qquad \text{und} \qquad \chi_A(g) = \frac{1}{2}\big(\chi(g)^2 - \chi(g^2)\big) \qquad \text{für alle } g \in G.$$

(d) Sei $G = S_4$ und $V = \mathbb{C}^4$ der natürliche Permutationsmodul. (Ist $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis von $V$, so gilt also $\pi.e_i = e_{\pi(i)}$ für $\pi \in S_4$ und $1 \leq i \leq 4$.) Wie in der Vorlesung sei $U_1 \subseteq V$ der Untermodul aller Spaltenvektoren mit der Eigenschaft, dass die Summe der Einträge gleich 0 ist. Sei $\chi$ der Charakter von $U_1$. Bestimmen Sie die Werte von $\chi$, $\chi_S$ und $\chi_A$.

(*Hinweis zu (c):* Weil $\mathrm{char}(K) \neq 2$ gilt, ist $M_n(K) = \mathrm{Sym}_n(K) \oplus \mathrm{Alt}_n(K)$; insbesondere gilt also $\chi = \chi_S + \chi_A$. Außerdem ist $\{E_{ij} + E_{ji} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ eine Basis von $\mathrm{Sym}_n(K)$ und $\{E_{ij} - E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ eine Basis von $\mathrm{Alt}_n(K)$.)

**Aufgabe 2.** In Ü3A5 wird die Quaternionengruppe als Gruppe von $2 \times 2$-Matrizen $Q_8 \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ definiert. Zeigen, dass diese Matrixdarstellung irreduzibel ist.

**Aufgabe 3.** Sei $|G| = n < \infty$ und $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Wir betrachten den Polynomring $R = \mathbb{C}[X_{g_1}, \ldots, X_{g_n}]$ in $n$ Variablen, die durch die Elemente von $G$ indiziert sind. Definiere die Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ mit $a_{ij} = X_{g_i g_j}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Die Darstellungstheorie von Gruppen wurde von Frobenius bei dem Versuch erfunden, die Faktorisierung von $\det(A) \in R$ in irreduzible Polynome zu bestimmen.

Versuchen Sie, dieses Problem für folgende Gruppen $G$ zu lösen: zyklische Gruppen der Ordnung 2 oder 3, symmetrische Gruppe $S_3$.