1. Übung zu GAGA B

Prof. M. Geck, WiSe 2019/20

Zur gemeinsamen Besprechung in den Übungen am 17.10.

Aufgabe 1. Gegeben seien die folgenden Elemente der Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Ordnungen von A, B und C.
(b) Bestimmen Sie A^{2018}, B^{2018} und C^{-2018}.
(c) Zeigen Sie, dass die Untergruppe $U := \langle A, B\rangle \subseteq G$ unendliche Ordnung hat.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe. Es gelte $G = \langle s, t\rangle$ mit $s, t \neq 1$, $s \neq t$ und $s^2 = t^2 = 1$. Sei $m := o(st) < \infty$. Zeigen Sie: $|G| = 2m$. Eine solche Gruppe heißt "Diedergruppe".

(b) Sei K ein Körper. Zeigen Sie $\mathrm{SL}_2(K) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in K \right\rangle$.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe. Seien $g_1, g_2 \in G$ mit $o(g_1) < \infty$ und $o(g_2) < \infty$. Zeigen Sie:

$$g_1g_2 = g_2g_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(o(g_1), o(g_2)) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad o(g_1g_2) = o(g_1)o(g_2) < \infty.$$

Geben Sie Beispiele an, die zeigen, dass man auf keine der beiden Voraussetzungen verzichten kann.

Aufgabe 4. Seien G, H Gruppen und $f\colon G \to H$ ein Gruppen-Homomorphismus.

(a) Zeigen Sie: Ist f bijektiv, so ist auch die inverse Abbildung $f^{-1}\colon H \to G$ ein Gruppen-Homomorphismus. (Eine ähnliche Aussage für lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen haben Sie vermutlich in der Linearen Algebra gesehen.)

(b) Zeigen Sie, dass $f(G) \subseteq H$ und $\mathrm{kern}(f) := \{g \in G \mid f(g) = e_H\} \subseteq G$ jeweils Untergruppen sind (wobei e_H das neutrale Element von H ist).

Aufgabe 5. Sei X eine nicht-leere Menge. Dann bezeichnen wir mit S_X die Menge aller bijektiven Abbildungen $\pi\colon X \to X$. Dies ist eine Gruppe (mit der Hintereinanderausführung "$\circ$" als Verknüpfung); S_X heißt "symmetrische Gruppe" auf X. Ist zum Beispiel $n \geq 1$ und $X = \{1, \ldots, n\}$, so ist S_X die übliche symmetrische Gruppe S_n.

(a) Zeigen Sie: Ist $|X| = \infty$, so gilt auch $|S_X| = \infty$.

(b) Sei Y eine weitere nicht-leere Menge, die die gleiche Mächtigkeit wie X hat; es gibt also eine bijektive Abbildung $g\colon X \to Y$. Zeigen Sie, dass dann S_X isomorph zu S_Y ist. (Konstruieren Sie explizit mit Hilfe von g einen Isomorphismus $\varphi\colon S_X \to S_Y$.)

(c) (Selbststudium) Sei Y eine nicht-leere Menge, so dass S_X und S_Y isomorph sind. Zeigen Sie, dass dann X und Y die gleiche Mächtigkeit haben.

[*Hinweis zu (c):* Mit (a) folgt die Aussage leicht, wenn X oder Y endlich ist. Ansonsten benötigt man etwas mehr Mengenlehre und noch weitere Theorie, siehe z.B. `https://mathoverflow.net/questions/12943/`.]