9. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, WiSe 2023/2024

Aufgabe 1. (V) Welche der folgenden Aussagen ist wahr oder falsch? (Geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel):

(i) Ist R ein kommutativer Ring mit $|R| = \infty$, so ist auch $|R^\times| = \infty$. (Hier bezeichnet wie üblich $R^\times$ die Gruppe der Einheiten.)
(ii) $\mathbb{Q}[X]$ ist ein Körper.
(iii) Sind R und S Ringe mit $R \cong S$, so ist jeder Ring-Homomorphismus $\varphi\colon R \to S$ ein Isomorphismus.
(iv) Jeder kommutative Ring ist ein Teilring eines Körpers.
(v) Ist $\varphi\colon R \to S$ ein Ring-Homomorphismus und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal, so ist auch $\varphi(I)$ ein Ideal.
(vi) Ist K ein Körper, $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring und $\varphi\colon K \to R$ ein surjektiver Ring-Homomorphismus, so ist R ein Körper.
(vii) Das Polynom $X^3 + \bar{2}X + \bar{4}$ is irreduzibel in $\mathbb{F}_5[X]$.
(viii) 2 ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$.
(ix) 3 ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$.
(x) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist das Polynom $X^9 + 7X^3 + 7n$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.
(xi) $1 + i\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]^\times$.
(xii) $5 - 2i\sqrt{2}$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

Aufgabe 2. (V) Finden Sie eine Faktorisierung in irreduzible Polynome für die folgenden Polynome. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) in $\mathbb{Z}[X]$: $2X^3 - 5X^2 - 4X + 10$, $\quad X^3 - 7X^2 + 3X + 3$, $\quad 2X^7 + 11X^3 - 33X + 22$, $X^4 - 17X + 23$, $\quad X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $\quad X^6 - 5X^5 + 6X^4 - 3X^3 + 15X^2 - 17X - 3$.

(b) in $\mathbb{Q}[X]$: $X^4 + 10X^3 - 50X^2 + 20$, $\quad X^7 - 9X^3$, $\quad \frac{2}{9}X^5 + \frac{5}{3}X^4 + X^3 + \frac{1}{3}$.

(c) in $\mathbb{R}[X]$: $X^3 - 7X^2 + 3X + 3$, $\quad X^4 + 1$, $\quad X^7 - 9X^3$, $\quad X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Aufgabe 3. (V) Für eine Primzahl p sei $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen. Sei $\mathbb{F}_p[X]$ der Polynomring über $\mathbb{F}_p$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau $\frac{1}{2}p(p-1)$ normierte, irreduzible Polynome $f \in \mathbb{F}_p[X]$ vom Grad 2.

(b) Für $p = 2, 3$, bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_p[X]$ vom Grad ≤ 4.

Bemerkung: Wir werden später in der Vorlesung zeigen, dass es zu jedem $n \geq 1$ mindestens ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$ mit $\mathrm{Grad}(f) = n$ gibt. (Dies ist nicht selbstverständlich!)

Aufgabe 4. (Schriftlich, 9=3+3+3 Punkte)
(a) Sei R faktoriell und K Quotientenkörper von R. Sei $0 \neq f \in R[X]$ normiert mit $\mathrm{Grad}(f) \geq 1$. Zeigen Sie: Ist $\alpha \in K$ eine Nullstelle von f, so folgt $\alpha \in R$.

(b) Seien nun $R = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$ und $0 \neq f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie: Ist $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ (gekürzter Bruch) eine Nullstelle von f, so gilt $a \mid a_0$ und $b \mid a_n$.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie dass es unendlich viele normierte irreduzible Polynome in $\mathbb{Z}[X]$ vom Grad n gibt.

Aufgabe 5. (Schriftlich, 6=3+3 Punkte) Für $n \geq 1$ sei $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ das n-te Kreisteilungspolynom mit $\mathrm{Grad}(\Phi_n) = \phi(n)$, wie in Satz 12.12 der Vorlesung.

(a) Zeigen Sie: Ist $n > 1$ ungerade, so gilt $\Phi_{2n} = \Phi_n(-X)$.
Zum Beispiel: $\Phi_3 = X^2 + X + 1$ und $\Phi_6 = X^2 - X + 1 = \Phi_3(-X)$.

(b) Finden Sie eine explizite Formel für Φ_n für den Fall, dass n eine Potenz von 2 ist.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Am 18./19. Dezember, vor den Übungsgruppen.