7. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, WiSe 2023/2024

Aufgabe 1. (V) Dieses Beispiel spielt eine Rolle in der Geometrie und der komplexen Analysis. Sei $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ (die obere komplexe Halbebene). Zeigen Sie, dass die folgende Vorschrift

$$G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z\right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

eine Operation von G auf $\mathcal{H}$ definiert. (Warum ist $cz + d \neq 0$ und $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$?)
Bestimmen Sie den Kern des zugehörigen Homomorphismus $\pi\colon G \to S_{\mathcal{H}}$ und zeigen Sie, dass die Operation transitiv ist, es also nur eine Bahn gibt.

(*Hinweis* : Bestimmen Sie die Bahn O_z für ein geschickt gewähltes $z \in \mathcal{H}$.)

Aufgabe 2. (V) Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Zeigen Sie: Ist $U \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, so dass $|U|$ eine p-Potenz ist, so folgt $U \subseteq P$ für alle $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

Aufgabe 3. (V) Sei G eine nicht-abelsche Gruppe mit $|G| = 111$. Bestimmen Sie für jede Primzahl p, welche $|G|$ teilt, die Anzahl der p-Sylow-Untergruppen von G.

Aufgabe 4. (Schriftlich, 9=3+3+3 Punkte) Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist $|G| = 42875$, so hat G einen Normalteiler der Ordnung 125.

(b) Ist $|G| = 345$, so ist G nicht einfach.

(c) Ist $|G| = 371$, so ist G zyklisch.

Aufgabe 5. (Schriftlich, 6=3+3 Punkte) Sei G eine endliche Gruppe und seien p, q Primzahlen.

(a) Zeigen Sie: Ist $|G| = pq$ oder $|G| = p^2q$, so ist G auflösbar.

(b) Zeigen Sie: Ist $|G| = pq$ und $p \nmid q - 1$, so ist G zyklisch.

Aufgabe 6. (Z) Seien G, H endliche Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ ein surjektiver Homomorphismus.

(a) Zeigen Sie: Ist G ist auflösbar, so ist auch H auflösbar.

(b) Sei $V \leq H$ eine Untergruppe. Nach Lemma 7.9 ist das Urbild $U := \varphi^{-1}(V) \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Zeigen Sie: Die Abbildung $f\colon G/U \to H/V$, $gU \mapsto \varphi(g)V$, ist wohl-definiert und bijektiv. Insbesondere folgt $[H : V] = |H/V| = |G/U| = |G : U]$.

(c) Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| = p^n$, wobei p eine Primzahl ist und $n \geq 1$. Zeigen Sie: Für jedes $m \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es eine Untergruppe $U \leq G$ mit $|U| = p^m$.

(*Hinweis zu (c):* Induktion nach n. Sei $x \in Z(G)$ ein Element der Ordnung p; dann ist $N := \langle x \rangle \trianglelefteq G$ und wir erhalten einen surjektiven Homomorphismus $\pi\colon G \to G/N$; benutze dann (b).)

Aufgabe 7. (Selbstudium) Zeigen Sie: Ist G eine endliche Gruppe mit $|G| < 60$, so ist G auflösbar.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Am 4./5. Dezember, vor den Übungsgruppen.