6. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, WiSe 2023/2024

Aufgabe 1. (V) **(a)** Bestimmen Sie alle Konjugiertenklassen von D_8 und Q_8. Für jede Konjugiertenklasse C, bestimmen Sie $C_G(g)$ für ein $g \in C$.

(b) Bestimmen Sie auch $Z(Q_8)$ und $Z(D_8)$ (wobei $Z(G) =$ Zentrum von G).

Aufgabe 2. (Schriftlich, 6 Punkte) Sei D_8 eine Diedergruppe der Ordnung 8. Bestimmen Sie alle Untergruppen von D_8; welche davon sind Normalteiler?

[*Hinweis:* Sei G eine Gruppe und nehmen wir an, die Konjugiertenklassen $\{C_i\}$ von G seien bekannt. Überlegen Sie Sich zunächst, dass jeder Normalteiler von G eine Vereinigung von einigen der Klassen C_i ist.]

Aufgabe 3. (V) Sei K ein Körper und $n \geq 1$.

(a) Bestimmen Sie das Zentrum von $\mathrm{GL}_n(K)$ und von $\mathrm{SL}_n(K)$.

(b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\tau\colon \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$, $A \mapsto (A^{\mathrm{tr}})^{-1}$, ist ein Automorphismus (wobei A^{tr} die transponierte Matrix bezeichnet). Ist $\tau \in \mathrm{Inn}(\mathrm{GL}_n(K))$?

[*Hinweis:* Ist G eine Gruppe und C eine Konjugiertenklasse von G, so ist $\gamma(C) = C$ für alle $\gamma \in \mathrm{Inn}(G)$.]

Aufgabe 4. (Schriftlich, 9 Punkte) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist $|G| = \infty$ und G einfach, so hat G keine Untergruppe $U \leq G$ mit $1 < [G : U] < \infty$.

(b) Hat G eine Untergruppe vom Index 3, so hat G auch einen Normalteiler vom Index 2 oder 3.

(c) Sei $|G| = 8$. Es gebe ein Element $g \in G$ mit $o(g) = 2$ und $g \notin Z(G)$. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe von S_4 ist.

[*Hinweis:* Ist U Untergruppe von G, so betrachten Sie die Operation von G auf $X = G/U$ und den zugehörigen Homomorphimus $\pi\colon G \to S_X$, wie in Beispiel 3.10 der Vorlesung.]

Aufgabe 5. (Selbststudium) Sei G eine Gruppe. Sei $U \leq G$ eine Untergruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Gilt $N \cap U = \{1\}$ und $G = N \cdot U$, so sagen wir, dass G **das semidirekte Produkt** von N und U ist. Sei dies nun der Fall. Dann zeigen Sie:

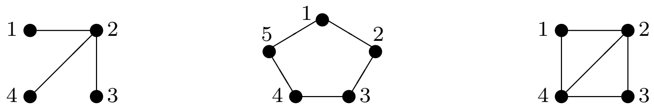
(a) Jedes $g \in G$ lässt sich eindeutig darstellen als Produkt $g = hu$ mit $h \in N$ und $u \in U$. Ist außerdem $g' \in G$ und $g' = h'u'$ mit $h' \in N$ und $u' \in U$, so stellen Sie auch das Produkt gg' in der obigen Form dar.

(b) Für jedes $u \in U$ ist die Abbildung $\gamma_u\colon N \to N$, $h \mapsto uhu^{-1}$, ein Automorphismus von N. Die Abbildung $\gamma\colon U \to \mathrm{Aut}(N)$, $u \mapsto \gamma_u$, ist ein Gruppen-Homomorphismus.

(c) Die Multiplikation in G ist vollständig bestimmt durch (1) die Multiplikation in N, (2) die Multiplikation in U und (3) die Angabe von $\gamma\colon U \to \mathrm{Aut}(N)$.

(d) Prüfen Sie für jede der folgenden Gruppen, ob sie als semidirektes Produkt (mit $N \neq G$ und $U \neq G$) geschrieben werden kann: Diedergruppe D_{2n} der Ordnung $2n$, symmetrische Gruppe S_n, Quaternionengruppe Q_8.

Aufgabe 6. (Selbstudium) Gegeben seien die folgenden Graphen:



(a) Bestimmen Sie jeweils die Symmetrie-Gruppe $S_{\mathcal{G}}$ (analog zu Bemerkung 8.2 der Vorlesung).

(b) Als Untergruppe von S_n (wobei $\{1, \ldots, n\}$) die Ecken nummeriert) operiert auch $S_{\mathcal{G}}$ auf $\{1, \ldots, n\}$. Prüfen Sie in jedem der drei Fälle, ob diese Operation transitiv ist. Bestimmen Sie jeweils den Stabilisator von 1 in $S_{\mathcal{G}}$.

(c) Bestimmen Sie die Symmetrie-Gruppe des regelmäßigen n-Ecks, für $n \geq 3$.

```
# Hier ist ein (einfaches) GAP-Programm zur Berechnung der Symmetrie-Gruppe.
# Fuer GAP (inkl. download, Tutorials, ...) siehe: https://www.gap-system.org/
# Input: n und V (Liste von Paaren [i,j] fuer die Kanten)
GraphAuto:=function(n,V)
  local G,pi;
  G:=[];
  for pi in SymmetricGroup(n) do
    if ForAll(V,v->[v[1]^pi,v[2]^pi] in V or [v[2]^pi,v[1]^pi] in V) then
      Add(G,pi);
    fi;
  od;
  return G;
end;
D8:=GraphAuto(4,[[1,2],[2,3],[3,4],[1,4]]);   # Beispiel aus Bemerkung 8.2
```

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Am 27./28. November, vor den Übungsgruppen.