# 5. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, WiSe 2023/2024

**Aufgabe 1.** Sei $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, wobei $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ Körper mit 3 Elementen ist.

**(a)** Zeigen Sie $|G| = 24$. (Benutzen Sie die Formel für $|\mathrm{GL}_n(K)|$ in Beispiel 8.6(b) der Vorlesung.)

**(b)** Wie viele Elemente der Ordnung 2 gibt es in $G$ ? Ist $G \cong S_4$ ?

**Aufgabe 2.** Wir betrachten die abelsche Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$. Sei $G = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$.

**(a)** Finden Sie ein Vertretersystem der Nebenklassen von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$.
**(b)** Zeigen Sie dass jedes Element in $G$ endliche Ordnung hat.
**(c)** Zeigen sie dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau eine Untergruppe $H_n$ der Ordnung $n$ gibt und dass $H_n$ zyklisch ist. Außerdem ist $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

**Aufgabe 3.** (Schriftlich, 6 Punkte) Sei $H$ die folgende Teilmenge von $\mathbb{C}$ :

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \quad |z| = 1\} \qquad \text{(alle komplexen Zahlen mit Absolutbetrag 1).}$$

**(a)** Zeigen Sie dass $(H, \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ist (wobei $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

**(b)** Zeigen Sie dass $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \cong (H, \cdot)$.

*Hinweis.* Man könnte z.B. folgende Abbildung betrachten $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times, \quad x \mapsto e^{2\pi i x}$ .

**Aufgabe 4.** (Schriftlich, 9 Punkte) Sei $G$ eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge aller bijektiven Gruppenhomomorphismen $\alpha\colon G \to G$ (auch Automorphismen genannt).

**(a)** Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$ eine Gruppe ist, mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Verknüpfung.

**(b)** Für festes $g \in G$ definieren wir eine Abbildung $\gamma_g\colon G \to G$ durch $\gamma_g(x) = gxg^{-1}$ für alle $x \in G$. Zeigen Sie, dass $\gamma_g \in \mathrm{Aut}(G)$ gilt.

**(c)** Zeigen Sie: Die Abbildung $\gamma\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto \gamma_g$, ist ein Gruppen-Homomorphismus mit $\mathrm{Kern}(\gamma) = Z(G)$. Sei $\mathrm{Inn}(G) := \{\gamma_g \mid g \in G\}$. Zeigen Sie: $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$. Die Automorphismen in $\mathrm{Inn}(G)$ heißen "innere Automorphismen".

**Aufgabe 5.** **(a)** Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass wenn $G$ endlich ist so ist auch $\varphi(G)$ endlich und $|\varphi(G)|$ teilt $|G|$.

**(b)** Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass wenn $H$ endlich ist so ist auch $\varphi(G)$ endlich und $|\varphi(G)|$ teilt $|H|$.

**(c)** Seien $G, H$ Gruppen, dann gibt es immer den *trivialen Homomorphismus* $\varphi\colon G \to H$ definiert durch $\varphi(g) = 1_H$, $\forall g \in G$.

Für jeden der folgenden Fälle, geben Sie ein Beispiel eines nicht trivialen Homomorphismus an oder begründen Sie dass keiner existiert :

*(i)* $\varphi\colon \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ *(ii)* $\varphi\colon \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *(iii)* $\varphi\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
*(iv)* $\varphi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *(v)* $\varphi\colon Q_8 \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *(vi)* $\varphi\colon D_8 \to S_3$
*(vii)* $\varphi\colon S_4 \to S_3$ *(viii)* $\varphi\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *(ix)* $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S_3$ *(x)* $\varphi\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$.

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** Am 13./14. November, vor den Übungsgruppen.