4. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, WiSe 2023/2024

Aufgabe 1. (Schriftlich, 9=3+2+4 Punkte) In dieser Aufgabe geht es um Diedergruppen; siehe Beispiel 6.3 der Vorlesung.

(a) Sei G eine Diedergruppe, d.h., es gibt Elemente $s, t \in G$ mit $G = \langle s, t\rangle$, $s \neq t$ und $o(s) = o(t) = 2$. Sei $a := st \in G$ und $o(st) = m < \infty$. Zeigen Sie: $U := \langle a\rangle$ ist eine Untergruppe mit $[G : U] = 2$ und $s \notin U$, $t \notin U$; es gilt $G = \langle s, a\rangle = \langle t, a\rangle$ und $|G| = 2m$.

(b) Zeigen Sie, dass die in Ü2A5 definierte Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ eine Diedergruppe ist.

(c) Sei $m \geq 2$ und $\varepsilon_m := e^{2\pi i/m} \in \mathbb{C}$. Wir definieren eine Abbildung $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $\sigma(z) := \varepsilon_m z$ für $z \in \mathbb{C}$. Außerdem definieren wir $\tau\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $\tau(z) := \overline{z}$ für $z \in \mathbb{C}$ (komplexe Konjugation). Interpretieren Sie σ und τ geometrisch in der komplexen Zahlenebene. Die Abbildungen σ und τ sind offenbar bijektiv, also gilt $\sigma, \tau \in S_{\mathbb{C}}$ (symmetrische Gruppe auf der Menge $X = \mathbb{C}$, siehe §1 der Vorlesung). Zeigen Sie: $G_{2m} := \langle \sigma, \tau\rangle \leq S_{\mathbb{C}}$ ist eine Diedergruppe der Ordnung $2m$.

Aufgabe 2. (V) Wir betrachten zwei Permutationen in S_5 wie folgt $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ und $\tau = (1\ 2\ 4\ 3)$ (in Zykelschreibweise).

(a) Zeigen Sie, dass $\tau \circ \sigma = \sigma^2 \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma^{-1} = \sigma^3 \circ \tau$.

(b) Sei $H := \langle \sigma, \tau\rangle \leq S_5$. Zeigen Sie, dass $H = \{\sigma^i \circ \tau^j \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ gilt und, als Konsequenz, $|H| \leq 20$.

(c) Zeigen Sie dass $|H| = 20$.

Aufgabe 3. (V) Wir benutzen die Notation C_n für eine zyklische Gruppe mit n Elementen.

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass dann $C_a \times C_b \simeq C_{ab}$ gilt.

Aufgabe 4. (V) Sei G eine abelsche Gruppe mit $|G| = n$. Finden Sie (bis auf Isomorphie) alle möglichen Gruppen G wenn (i) $n = 8$ (ii) $n = 9$ (iii) $n = 10$ (iv) $n = 12$ (v) $n = 14$ (vi) $n = 15$ (vii) $n = 24$ (viii) $n = 1430$.

(Damit ist gemeint: Für ein gegebenes n finden Sie eine Liste von Gruppen $G_1, \ldots, G_r$ mit $|G_i| = n$ und so dass G zu genau einer der G_i isomorph ist. Zum Beispiel für $n = 4$ ist eine solche Liste gegeben durch $G_1 = C_4$ und $G_2 = C_2 \times C_2$, wobei C_k = zyklische Gruppe der Ordnung k.)

Aufgabe 5. (Schriftlich, 6=3+3 Punkte) Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler.

(a) Sei $U \leq G$ eine beliebige Untergruppe. Zeigen Sie, dass $U \cdot N = \{un \mid u \in U, n \in N\}$ eine Untergruppe von G ist; außerdem ist $U \cdot N = N \cdot U$.

(b) Sei G endlich und $g \in G$. Zeigen Sie: $\quad \mathrm{ggT}\big(o(g), [G : N]\big) = 1 \quad \Rightarrow \quad g \in N$.
Zum Beispiel folgt damit sofort: $\quad \{\pi \in S_n \mid o(\pi) \text{ ungerade}\} \subseteq A_n$ für $n \geq 2$.
(*Hinweis zu (b)*: Betrachten Sie den kanonischen Homomorphismus $\pi_N\colon G \to G/N$.)

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Am 13./14. November, vor den Übungsgruppen.