3. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, WiSe 2023/2024

Aufgabe 1. (V) Sei G eine Gruppe. Gegeben seien $g_1, g_2 \in G$ mit $o(g_1) < \infty$ und $o(g_2) < \infty$. Zeigen Sie: Gilt $g_1g_2 = g_2g_1$ und $\mathrm{ggT}(o(g_1), o(g_2)) = 1$, so folgt $o(g_1g_2) = o(g_1)o(g_2)$.

Geben Sie Beispiele an, die zeigen, dass man auf keine der beiden Voraussetzungen verzichten kann.

Aufgabe 2. (V) Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| = 2n$.

(a) Zeigen Sie, dass G mindestens ein Element mit Ordnung 2 enthält.
(b) Sei nun n ungerade und G abelsch. Zeigen Sie, dass G *genau* ein Element mit Ordnung 2 enthält.

Aufgabe 3. (Schriftlich, 6 Punkte) Zeigen Sie, dass eine Gruppe $G \neq \{1_G\}$ ohne echte Untergruppen endlich sein muss und ihre Ordnung eine Primzahl sein muss.

Aufgabe 4. (Schriftlich, 9 Punkte) Sei $n \geq 2$. Eine Permutation $\pi \in S_{n-1}$ können wir auch als Permutation von S_n auffassen, indem wir $\pi(n) = n$ setzen. Damit ist also $S_{n-1} \leq S_n$. (Ist $\pi \in S_n$ und $\pi(n) = n$, so können wir umgekehrt π auch als Permutation in S_{n-1} auffassen.)

(a) Für $1 \leq k < n$ sei $\tau_k \in S_n$ die Permutation mit $\pi(k) = n$, $\pi(n) = k$ und $\pi(j) = j$ für $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k, n\}$, d.h., τ_k vertauscht k und n und lässt alle anderen Ziffern fest. Zeigen Sie, dass $\{\mathrm{id}, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$ ein Repräsentantensystem für die (Links-)Nebenklassen von S_{n-1} in S_n ist, d.h., es gilt $S_n = S_{n-1} \cup \tau_1 S_{n-1} \cup \ldots \cup \tau_{n-1}S_{n-1}$, wobei die Vereinigung disjunkt ist.

(b) In S_4 finden Sie die Linksnebenklasse und die Rechtsnebenklasse von τ_2 bezüglich S_3.

[*Hinweis zu (a):* Wegen $|S_n| = n!$ und $|S_{n-1}| = (n-1)!$ ist nach dem Satz von Lagrange klar, dass es genau n Nebenklassen in S_n bezüglich S_{n-1} gibt. Sei nun $\pi \in S_n$ beliebig und setze $k := \pi(n)$. Ist $k = n$, so gilt bereits $\pi \in S_{n-1}$; ist $k < n$, so betrachte $\tau_k \circ \pi$.]

Aufgabe 5. (V) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Phi(n)$ die Eulersche Phi-Funktion.

(a) Sei $n = 2^k$ mit $k \geq 1$. Bestimmen Sie $\phi(n)$.
(b) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\phi(n) \leq 2$. Zum Beispiel gilt $\phi(1) = \phi(2) = 1$, $\phi(3) = \phi(4) = \phi(6) = 2$. Gibt es noch weitere solche n ?

[*Hinweis zu (b):* Sei $n \geq 7$. Dann sind 1 und $n-1$ teilerfremd zu n, also ist $\phi(n) \geq 2$. Ist n ungerade, so betrachte auch $n-2$. Ist n gerade, so schreibe $n = 2^k m$ mit $k \geq 1$ und $m \in \mathbb{N}$ ungerade. Ist $m = 1$, siehe Teil **(a)** ; ist $m = 3$, betrachte $1, 7, n-1$. Ist $m \geq 5$, so betrachte $m-2$. Oder verwenden Sie die allgemeine Formel aus der folgenden Aufgabe.]

Aufgabe 6. (Zum Selbststudium) Es soll eine allgemeine Formel für die Eulersche Phi-Funktion hergeleitet werden. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < b$ bezeichnen wir $[a, b) := \{m \in \mathbb{Z} \mid a \leq m < b\}$ (nicht zu verwechseln mit den Bezeichnungen in der Analysis). Für $n \in \mathbb{N}$ ist dann also $\phi(n)$ nach Definition die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen im Intervall $[0, n)$.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\phi(n)$ auch die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen im Intervall $[kn, (k+1)n)$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Zeigen Sie: $\phi(pn) = \begin{cases} p\phi(n) & \text{falls } p \mid n, \\ (p-1)\phi(n) & \text{falls } p \nmid n. \end{cases}$

[*Hinweis:* Zerlegen Sie das gesamte Intervall $[0, pn)$ in die Teilintervalle $[0, n)$, $[n, 2n)$, ..., $[(p-1)n, pn)$. Ist $k \in \mathbb{N}_0$ in einem dieser Teilintervalle, wie hängen dann die Bedingungen $\mathrm{ggT}(k, n) = 1$ und $\mathrm{ggT}(k, pn) = 1$ voneinander ab? Dazu wird die Unterscheidung der beiden Fälle $p \mid n$ und $p \nmid n$ wichtig sein.]

(c) Sei nun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und schreibe $n = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ mit paarweise verschiedenden Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ und $n_i \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq r$. Benutzen Sie dann (b), um zu zeigen:

$$\boxed{\phi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i - 1}(p_i - 1) = n \prod_{i=1}^{r} \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big)}$$

Bemerkung: Der obige, sehr elementare Beweis für die Formel in (c) ist entnommen aus:
S. Chorge and J. Vargas, Proof of Euler's ϕ (Phi) Function Formula, Rose-Hulman Undergraduate Mathematical Journal **14** (2013), Article 6.
(Online verfügbar auf `https://scholar.rose-hulman.edu/rhumj/vol14/iss2/6`.) Für einen völlig anderen Beweis (der vielleicht etwas kürzer ist, aber dafür auch etwas mehr allgemeine Theorie benötigt) siehe zum Beispiel §6.3.3 im Buch von Karpfinger–Meyberg.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Am 6./7. November, vor den Übungsgruppen.