14. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, WiSe 2023/2024

Aufgabe 1. (V) Sei $f = X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$ und $\Delta := \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ Zerfällungskörper von f. Nach der Vorlesung ist $[L : \mathbb{Q}] \leq 3! = 6$.

(a) Zeigen Sie: Ist $\Delta < 0$, so gibt es 3 verschiedene reelle Nullstellen von f; ist $\Delta = 0$, so gibt es 3 reelle Nullstellen, die aber nicht alle verschieden sind; ist $\Delta > 0$, so gibt es 1 reelle Nullstelle und 2 nicht-reelle, konjugiert-komplexe Nullstellen.

[*Hinweis:* Der 1. Fall $\Delta < 0$ ist der interessanteste. Hier ist $u = \sqrt[3]{-q/2 + iA}$ und $v = \sqrt[3]{-q/2 - iA}$ mit einer reellen Zahl $A > 0$. Sei $u = a + ib \in \mathbb{C}$. Wegen $uv = -p/3$ muss dann $v = a - ib$ gelten. Sei außerdem $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2 \in \mathbb{C}$ eine 3. Einheitswurzel. Dann sind die drei reellen Nullstellen gegeben durch $\alpha_1 = 2a$, $\alpha_2 = -a - b\sqrt{3}$ und $\alpha_3 = -a - b\sqrt{3}$. Die beiden anderen Fälle lassen sich ähnlich behandeln.]

In den folgenden drei Aufgabenteilen, geben Sie für jede Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ explizit an, ob $\lambda \in \mathbb{Q}$ oder $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oder $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Cardano-Formeln die Nullstellen von $f = X^3 + 6X + 2$.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Cardano-Formeln die Nullstellen von $f = X^3 - 3X + 1$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Ü12A2.

(d) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f = X^3 + 6X - 20$. Gibt es Nullstellen in $\mathbb{Q}$? Was ist hier $[L : \mathbb{Q}]$? Analog für das Polynom $f = X^3 - 15X - 4$.

Aufgabe 2. (V und Bonus-Schriftlich 10 Punkte) Welche der folgenden Aussagen ist wahr oder falsch? (Geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel):

(i) Jeder kommutative Ring ist ein Teilring eines Körpers.
(ii) Es gibt einen endlichen Körper mit mehr als 10^{100} Elementen.
(iii) Für jede positive ganze Zahl n gibt es einen Körper mit genau 11^n Elementen.
(iv) Für jede positive ganze Zahl n gibt es einen Körper mit genau 10^n Elementen.
(v) Für jede positive ganze Zahl n gibt es einen Körper mit genau 9^n Elementen.
(vi) Jeder Körper K besitzt nicht-triviale algebraische Erweiterungen.
(vii) Jede Erweiterung von $\mathbb{R}$ hat endlichen Grad über $\mathbb{R}$.
(viii) $\sin\left(\frac{2\pi}{55}\right)$ ist konstruierbar mit Zirkel und Lineal.
(ix) $i\sqrt{9 - \sqrt{71}}$ ist konstruierbar mit Zirkel und Lineal.

Aufgabe 3. (V und Bonus-Schriftlich 10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Körpergrade $[\mathbb{Q}(\sqrt{3 + \sqrt{6}}) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(i - \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(i, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$.
(b) Sei $\zeta := \exp(2\pi i/5) \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\sqrt[7]{2}, \zeta) : \mathbb{Q}]$.
(c) Seien α, $\beta \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Grad}\mu_{\alpha,\mathbb{Q}} = m$, $\mathrm{Grad}\mu_{\beta,\mathbb{Q}} = n$ und $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Zeigen Sie dass $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = mn$ und $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4. Sei $\omega := \exp(2\pi i/3) \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel und sei $\alpha = 2 - \omega$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_{\alpha,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[X]$.
(b) Bestimmen Sie $\alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\omega)$.
(c) Finden Sie eine Primfaktorzerlegung von 7 in $\mathbb{Z}[\omega]$.

Aufgabe 5. (V) Geben Sie ein Beispiel

- von zwei endlichen Gruppen G und H, die nicht isomorph sind und so, dass für jede natürliche Zahl d die Anzahl der Elemente der Ordnung d in G gleich der Anzahl der Elemente der Ordnung d in H ist
- einen Ring der nicht kommutativ und ohne 1 ist
- einen Ring, der kein Integritätsbereich ist
- einen Integritätsbereich, der nicht faktoriell ist
- einen faktoriellen Ring, der kein Hauptideal ist.

Abgabe der Bonus/schriftlichen Aufgaben (nur wenn Sie noch schriftliche Punkte brauchen) : Am 5./6. Februar, vor den Übungsgruppen.