13. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, WiSe 2023/2024

Aufgabe 1. (V) In dieser Aufgabe geht es um Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (siehe §18 der Vorlesung). Gegeben sei jeweils eine Startmenge $P_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0,0) \in P_0$ und $(1,0) \in P_0$.

(a) Sie $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Zeigen Sie: Ist $(a,0) \in \mathbb{R}^2$ aus P_0 konstruierbar, so ist auch $(\sqrt{a},0) \in \mathbb{R}^2$ aus P_0 konstruierbar.

(b) Sei $(a,b) \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: (a,b) ist aus P_0 konstruierbar genau dann, wenn $(a,0)$ und $(0,b)$ aus P_0 konstruierbar sind.

Aufgabe 2. (Schriftlich, 9=3+3+3 Punkte) In dieser Aufgabe geht es um das Problem der **Winkeldreiteilung** (siehe §18 der Vorlesung). Gegeben sei ein Winkel θ, d.h., $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \theta < 2\pi$. Wir sagen, dass θ mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn der Punkt $(\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist (immer bezüglich einer gegebenen Startmenge $P_0 \subseteq \mathbb{R}^2$).

(a) Zeigen Sie: Der Winkel θ ist konstruierbar genau dann, wenn der Punkt $(\cos(\theta), 0) \in \mathbb{R}^2$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

(b) Sei von nun an $P_0 := \{(0,0), (1,0)\}$. Zeigen Sie, dass $\theta := \pi/3$ aus P_0 mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist; geben Sie explizit eine Konstruktion des Punktes $(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3)) \in \mathbb{R}^2$ an.

Nehmen wir nun $(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))$ zur obigen Startmenge P_0 hinzu und setzen $P_1 := P_0 \cup \{(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))\}$.

(c) Zeigen Sie, dass der dreigeteilte Winkel $\theta' := \theta/3 = \pi/9$ nicht mit Zirkel und Lineal aus der Startmenge P_0 und auch nicht aus der Startmenge P_1 konstruierbar ist. (*Hinweis:* Wie hängt $\cos(\pi/9)$ mit dem α in Ü12A2 zusammen?) — Damit ist die Winkeldreiteilung im Allgemeinen unmöglich; für mehr dazu siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiteilung_des_Winkels`

Aufgabe 3. (V) Bestimmen Sie alle $m \in \mathbb{N}$ mit $\cos(2\pi/m) \in \mathbb{Q}$. (*Hinweis:* Ü3A5 und Satz 18.5.)

Aufgabe 4. (V) Sei K ein Körper mit 4 Elementen und $f = X^3 + X + 1 \in K[X]$. Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist. Nach dem Satz von Kronecker gibt es eine Erweiterung $L \supseteq K$ und ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ und $f(\alpha) = 0$. Ist L ein Zerfällungskörper von f ?

Aufgabe 5. (Schriftlich, 10 Punkte) Wahr oder falsch? (Kurzer Beweis oder Gegenbeispiel.)

(a) Wenn die Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ eine irrationale Zahl enthält, so gilt $\mathbb{R} = \mathbb{Q}(S)$.

(b) $\mathbb{C}$ ist ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$.

(c) Es gibt einen endlichen Körper, der algebraisch abgeschlossen ist.

(d) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\mathrm{Grad}(f) = n$.

(e) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ mit $\mathrm{Grad}(f) = n$.

(f) Es gibt eine algebraische Körpererweiterung $K \supseteq \mathbb{R}$ mit $[K : \mathbb{R}] = \infty$.

(g) Es gibt eine algebraische Körpererweiterung $K \supseteq \mathbb{Q}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = \infty$.

(h) Ist $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung mit $|K| < \infty$, so gilt $[L : K] < \infty$.

(i) Das regelmäßiges 6-Vieleck ist konstruierbar.

(j) Das regelmäßiges 9-Vieleck ist konstruierbar.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Am 29./30. Januar, vor den Übungsgruppen.