11. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, WiSe 2023/2024

Aufgabe 1. (V) Wahr oder falsch? (Kurzer Beweis oder Gegenbeispiel.)

(i) Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{F}_{37} = \mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ enthält ein Element der Ordnung 3.
(ii) Ist p eine Primzahl, so ist jeder Körper der Charakteristik p endlich.
(iii) Jeder Körper der Charakteristik 0 ist unendlich.
(iv) Ist $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung mit $|K| < \infty$ und $[L : K] < \infty$, dann gilt $|L| < \infty$.
(v) Ist $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung und $t \in L$ transzendent über K, so ist $[L : K] = \infty$.
(vi) Ist $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung und $z \in L$ algebraisch über K, so ist auch $z + z^2$ algebraisch über K.
(vii) Ist $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung und $t \in L$ transzendent über K, so ist $t^2 + t^{-2} \in L$ algebraisch über K.

Aufgabe 2. (Schriftlich, 8 Punkte) Wahr oder falsch? (Kurzer Beweis oder Gegenbeispiel.)
(i) $\mathbb{C}$ ist eine einfache Erweiterung von $\mathbb{Q}$.
(ii) $\mathbb{C}$ ist eine einfache Erweiterung von $\mathbb{R}$.
(iii) Jede einfache Erweiterung ist algebraisch.
(iv) Jede Erweiterung ist einfach.
(v) Jedes Element eines Körpers K ist algebraisch über K.
(vi) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ mit Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$ vom Grad n. Wenn $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f \neq 0$ mit $f(\alpha) = 0$, dann ist $\mathrm{Grad} f \geq n$.
(vii) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ mit Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$ vom Grad n. Wenn $f \in \mathbb{R}[X]$, $f \neq 0$ mit $f(\alpha) = 0$, dann ist $\mathrm{Grad} f \geq n$.
(viii) Jede algebraische Erweiterung eines Körpers ist eine endliche Erweiterung.

Aufgabe 3. (V)
(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{ \sqrt[2^n]{2} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist. (Dies liefert einen anderen Beweis dafür, dass $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$ gilt.)

(b) Zeigen Sie für jede der folgenden Zahlen $z \in \mathbb{C}$, dass z algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom:

$$\tfrac{1}{3}(2 + \sqrt{13}), \qquad \sqrt[13]{-135}, \qquad \sqrt{3} + \sqrt{6}, \qquad \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}, \qquad \sqrt[5]{3 + \sqrt{-17}}, \qquad \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{-2}).$$

Aufgabe 4. (Schriftlich, 16 Punkte)
(a) Bestimmen Sie die Körpergrade der folgenden Erweiterungen:

(i) $\mathbb{R}(\sqrt{3}) \supseteq \mathbb{R}$ (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{10}) \supseteq \mathbb{Q}$ (iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}) \supseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (iv) $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{3}) \supseteq \mathbb{Q}$
(v) $\mathbb{Q}(3, \sqrt{5}, \sqrt{11}) \supseteq \mathbb{Q}$ (vi) $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{5}}) \supseteq \mathbb{Q}$ (vii) $\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}) \supseteq \mathbb{Q}$
(viii) $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, \sqrt[13]{6})$.

(b) Zeigen Sie: (i) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{11}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5} + \sqrt{11})$ (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3})$.

[*Hinweis*: Gradsatz in Kombination mit Satz 16.3; siehe auch Beispiel 16.8.]

Aufgabe 5. Sei $\alpha := \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} \in \mathbb{R}$. In Aufgabe 3(b) haben Sie gesehen, dass α algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist, und das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ bestimmt. Betrachten Sie nun die Erweiterung $L = \mathbb{Q}(\alpha) \supseteq \mathbb{Q}$. Nach Satz 16.3 der Vorlesung lässt sich jedes Element von L eindeutig schreiben als $\sum_{i=0}^{d-1} a_i \alpha^i$, wobei $d := \mathrm{Grad}(\mu_\alpha) \geq 1$ und $a_i \in \mathbb{Q}$. Finden Sie solche eindeutigen Darstellungen für die folgenden Elemente in L:

$$\alpha^4, \qquad (2-\alpha)^{-1}, \qquad \big(\tfrac{1}{5}\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\big)\big(\alpha^3 - \tfrac{3}{5}\alpha + 2\big).$$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Am 15./16. Januar, vor den Übungsgruppen.