10. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, WiSe 2023/2024

Aufgabe 1. (V) Schriftlich, 6=3+3 Punkte) Noch was zu Kreisteilungsprolynomen. Zum beispiel: Zeigen Sie folgende Aussagen zu Kreisteilungspolynomen. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann gilt:

$$\Phi_n(X^p) = \begin{cases} \Phi_{np} \cdot \Phi_n & \text{falls } p \nmid n, \\ \Phi_{np} & \text{falls } p \mid n. \end{cases}$$

Mit den obigen Formeln kann man Φ_n (für beliebiges n) effizient rekursiv ausrechnen; bestimmen Sie damit zum Beispiel Φ_{24}.

[*Hinweise:* Siehe zum Beispiel `https://math.stackexchange.com/questions/2694112/` und `https://math.stackexchange.com/questions/2541511/`. Analoge Formeln für die Euler ϕ-Funktion sind in Übung 3, Aufgabe 6.]

Aufgabe 2. (V) Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{C}[X, Y]$ über $\mathbb{C}$ mit den Unbestimmten X, Y.

(a) Zeigen Sie, dass die Polynome $Y - X^2,\ XY - 1,\ X^3 - Y^2 - X\ \in \mathbb{C}[X, Y]$ irreduzibel sind.

(b) Zeigen Sie, dass $R = \mathbb{C}[X, Y]/(X^3 - Y^2 - X)$ ein Integritätsring ist, aber nicht faktoriell.

[*Hinweis zu (b):* Für $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ sei $\bar{f} := f + (X^3 - Y^2 - X) \in R$. Zeigen Sie, dass $\bar{Y} \in R$ irreduzibel ist, aber kein Primelement; beachte $\bar{Y}^2 = \bar{X}(\bar{X} - 1)(\bar{X} + 1)$.]

Aufgabe 3. (V) Sei R ein Integritätsring, $n \geq 1$ und $R[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$. Zeigen Sie die Formel (1) im Beweis von Satz 14.4, also

$$\mathrm{LT}(f \cdot g) = \mathrm{LT}(f) \cdot \mathrm{LT}(g) \qquad \text{für } f, g \in R[X_1, \ldots, X_n] \text{ mit } f \neq 0,\ g \neq 0.$$

[*Hinweis:* Betrachten Sie zuerst den Fall, dass $g = cX_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ mit $0 \neq c \in R$ und $i_1, \ldots, i_n \geq 0$.]

Aufgabe 4. (Schriftlich, 8=4+4 Punkte) Sei $R = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über $\mathbb{Z}$ in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$.

(a) Zeigen Sie, dass $f := \sum_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} X_i^2 X_j \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ symmetrisch ist und bestimmen Sie ein $g \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $f = g(s_1, \ldots, s_n)$. Behandeln Sie zuerst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

(b) Sei $\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n}(X_i - X_j) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie, dass $\tilde{\pi}(\Delta) = \varepsilon(\pi)\Delta$ für alle $\pi \in S_n$ gilt, wobei $\varepsilon(\pi) = \pm 1$ das Signum von π ist. — Es folgt, dass $\tilde{\pi}(\Delta^2) = \tilde{\pi}(\Delta)^2 = \varepsilon(\pi)^2\Delta^2 = \Delta^2$ für alle $\pi \in S_n$ gilt, also Δ^2 symmetrisch ist, wie bereits in der Vorlesung erwähnt.

Aufgabe 5. (V) Sei $f = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von f. Bestimmen Sie $\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2$ und $\alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k$, für $k \in \mathbb{N},\ k \leq 5$.

[*Hinweis:* Die "verblüffende Konsequenz" in Beispiel 14.6.]

Aufgabe 6. (Z) Sei K ein Körper. Analog zur Konstruktion des Polynomrings $K[X]$ erhält man den *Ring der Laurent-Polynome*

$$K[X, X^{-1}] := \Big\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k \mid a_k \in K, \text{ nur endlich viele } a_k \neq 0 \Big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $K[X, X^{-1}]$ ein Hauptidealring ist.

(b) Zeigen Sie, dass $K[X, X^{-1}]$ isomorph ist zu $K[X, Y]/(XY - 1)$. Geben Sie explizit einen Isomorphismus an.

Aufgabe 7. (Z) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Ein Ideal $I \trianglelefteq R$ heißt **maximales Ideal**, wenn $I \neq R$ gilt und es kein Ideal $J \trianglelefteq R$ mit $I \subsetneqq J \subsetneqq R$ gibt.

(a) Sei $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie: I ist ein maximales Ideal $\Leftrightarrow$ R/I ist ein Körper.
[*Hinweis*: Ist $a \in R$ beliebig, so ist $J := I + (a)$ ein Ideal von R mit $I \subseteq J$.]
Insbesondere folgt: I maximales Ideal $\Rightarrow$ I Primideal (siehe Aufgabe 4 auf Übungsblatt 8).

(b) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale in $R = \mathbb{Z}$.

(c) Sei $R = \mathbb{Z}[X]$ und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie:
(i) $I = \{pf + Xg \mid f, g \in \mathbb{Z}[X]\}$ ist ein maximales Ideal mit $\mathbb{Z}[X]/I \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
(ii) Das Hauptideal $(p) \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$ ist ein Primideal, aber nicht maximal; es gilt $\mathbb{Z}[X]/(p) \cong \mathbb{F}_p[X]$.

(d) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale in $R = \mathbb{Z}[X]$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Am 8./9. Januar, vor den Übungsgruppen.