Zusatzübungen zu Kapiteln I und II

Dr. L. Iancu, WiSe 2020

Auf diesem Blatt finden Sie Aufgaben, mit denen Sie noch einmal einige Techniken einüben können oder die weitere (interessante) Beispiele und Eigenschaften von Gruppen behandeln. Diese Aufgaben sind zum Selbststudium gedacht, es werden auch keine Musterlösungen dazu erstellt.

Aufgabe 1. Finden Sie die Ordnungen der folgenden Gruppen :

(a) Die von $\overline{25}$ erzeugte Untergruppe in $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

(b) Die von $\overline{30}$ erzeugte Untergruppe in $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$.

(c) Die von i erzeugte Untergruppe in $(\mathbb{C}^{\times}, \cdot)$.

(d) Die von $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ erzeugte Untergruppe in $(\mathbb{C}^{\times}, \cdot)$.

(e) Die von $1+i$ erzeugte Untergruppe in $(\mathbb{C}^{\times}, \cdot)$.

Aufgabe 2. Finden Sie die Ordnungen der folgenden Faktorgruppen G/H wobei :

(a) $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ H = \langle\bar{3}\rangle$; **(b)** $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z},\ H = \langle\bar{2}\rangle \times \langle\bar{2}\rangle$;

(c) $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ H = \langle(\bar{2},\, \bar{1})\rangle$; **(d)** $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},\ H = \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$;

(e) $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times S_3,\ H = (\bar{2},\, (12))$.

Aufgabe 3. Finden Sie die Ordnung des Elementes x in folgenden Faktorgruppen G/H :

(a) $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z},\ H = \langle\bar{4}\rangle, \quad x = \bar{5} + H$; **(b)** $G = \mathbb{Z}/60,\ H = \langle\overline{12}\rangle, \quad x = \overline{26} + H$;

(c) $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\ H = \langle(\bar{1},\, \bar{1})\rangle, \quad x = (\bar{3},\, \bar{1}) + H$;

(d) $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\ H = \langle(\bar{4},\, \bar{4})\rangle, \quad x = \langle(\bar{2},\, \bar{0})\rangle + H$.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Für welche Elemente g ist die Abbildung $\varphi_g \colon G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus ?

(a) $\varphi_g(x) = gx,\ \forall x \in G$; **(b)** $\varphi_g(x) = gxg^{-1},\ \forall x \in G$.

Aufgabe 5. Finden Sie das Zentrum $Z(G)$ und die Kommutatorgruppe für :

(a) $G = D_8$; **(b)** $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times S_3$; **(c)** $G = S_3 \times D_8$.

Aufgabe 6. Wir betrachten die Gruppe $SL_2(\mathbb{F}_5)$.

(a) Zeigen Sie, dass $|SL_2(\mathbb{F}_5)| = 120$.

(b) Zeigen Sie, dass eine 2-Sylow-Untergruppe von $SL_2(\mathbb{F}_5)$ isomorph zu Q_8 ist.

(c) Benutzen Sie Teil **(b)** um zu zeigen dass $SL_2(\mathbb{F}_5)$ und S_5 nicht isomorph sind.

[*Hinweis zu* **(b)** *und* **(c)** *:* Aufgabe 1 in Übungsblatt 7.]

Aufgabe 7. Sei G eine endliche Gruppe. Seien $X, Y \leq G$ Untergruppen.
Wir setzen $X \cdot Y := \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\} \subseteq G$. (Dies ist im Allgemeinen keine Untergruppe.) Sei $U := X \cap Y$ und $X = x_1 U \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, x_r U$ die Zerlegung von X in Linksnebenklassen nach U. Zeigen Sie, dass jedes $g \in X \cdot Y$ sich eindeutig schreiben lässt als $g = x_i y$ mit $1 \leq i \leq r$ und $y \in Y$.
Schließen Sie daraus: $|X \cdot Y| = \dfrac{|X||Y|}{|X \cap Y|}$.

Aufgabe 8. Sei G eine endliche Gruppe. Sei $n = |G|$ und d ein Teiler von n. Zeigen Siei: Wenn G *genau eine* Untergruppe H mit $|H| = d$ besitzt, dann ist H sogar ein Normalteiler von G.

Aufgabe 9. Geben Sie ein Beispiel von zwei endlichen Gruppen G und H, die nicht isomorph sind und so, dass für jede natürliche Zahl d die Anzahl der Elemente der Ordnung d in G gleich der Anzahl der Elemente der Ordnung d in H ist.

Aufgabe 10. Sei G eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe und $V \trianglelefteq G$ ein Normalteiler.

(a) Zeigen Sie: $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ ist eine Untergruppe von G.

(b) Es gelte $G = UV$. Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi\colon U \to G/V$, $u \mapsto uV$, ist ein surjektiver Homomorphismus mit $\mathrm{Kern}(\varphi) = U \cap V$. Insbesondere ist also $U \cap V \trianglelefteq U$ ein Normalteiler in U; mit dem Homomorphiesatz folgt außerdem $U/(U \cap V) \cong G/V$.

Aufgabe 11. **(a)** Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ isomorphe Gruppen sind.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{S}, \cdot)$ isomorphe Gruppen sind, wobei $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die *Kreisgruppe* ist.

Aufgabe 12. Seien N, H Gruppen und $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $\tilde{G} := N \times H$ zu einer Gruppe wird, mit Verknüpfung $\circ_\varphi$ definiert durch

$$(n_1, h_1) \circ_\varphi (n_2, h_2) := (n_1 \varphi(h_1)(n_2),\ h_1 h_2).$$

Die so konstruierte Gruppe heißt das semidirekte Produkt von N und H (mittels φ). Es ist $\tilde{G}$ das direkte Produkt von N und H (wie in §1 der Vorlesung definiert), falls $\varphi(h) = \mathrm{id}_N$ für $h \in H$ gilt.

(b) Sei $\tilde{N} = \{(n, 1_H) \mid n \in N\} \subseteq \tilde{G}$ und $\tilde{H} = \{(1_N, h) \mid h \in H\} \subseteq \tilde{G}$. Zeigen Sie, dass $\tilde{H}$ eine Untergruppe (isomorph zu H) und $\tilde{N}$ ein Normalteiler (isomorph zu N) ist; außerdem gilt $\tilde{G} = \tilde{N}\tilde{H}$ und $\tilde{N} \cap \tilde{H} = \{1_{\tilde{G}}\}$.

Aufgabe 13. **(a)** Finden Sie $\mathrm{Aut}(G)$, wobei $G = V_4,\ S_3,\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q}$.

(b) Sei K ein Körper und $n \geq 1$. Zeigen Sie: Die Abbildung $\tau\colon \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$, $A \mapsto (A^{\mathrm{tr}})^{-1}$, ist ein Automorphismus (wobei A^{tr} die transponierte Matrix bezeichnet). Ist $\tau \in \mathrm{Inn}(\mathrm{GL}_n(K))$?

[*Hinweis:* Ist G eine Gruppe und C eine Konjugiertenklasse von G, so ist $\gamma(C) = C$ für alle $\gamma \in \mathrm{Inn}(G)$.]

Aufgabe 14. Dieses Beispiel spielt eine Rolle in der Geometrie und komplexen Analysis. Sei $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ (die obere komplexe Halbebene). Zeigen Sie, dass G auf $\mathcal{H}$ operiert durch die Abbildung

$$G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

(Warum ist $cz+d \neq 0$ und $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$?) Bestimmen Sie den Kern des zugehörigen Homomorphismus $\pi\colon G \to S_{\mathcal{H}}$ und zeigen Sie, dass die Operation transitiv ist, es also nur eine Bahn gibt. (Hinweis: Bestimmen Sie die Bahn O_z für ein geschickt gewähltes $z \in \mathcal{H}$.)

Aufgabe 15. Hier ist noch ein anderer Beweis von Satz 6.5 der Vorlesung, der sogar etwas mehr zeigt, nämlich dass $S_n = \langle (i\ i{+}1) \mid 1 \leq i \leq n-1 \rangle$ gilt. Benutzen Sie eine Induktion nach n und gehen Sie wie folgt vor. Sei $\pi \in S_n$ und $k := \pi(n)$. Ist $k = n$, so ist $\pi \in S_{n-1}$. Sei nun $k < n$. Dann setze $\pi' := \pi \circ (k\ k{+}1) \circ (k{+}1\ k{+}2) \circ \ldots \circ (n{-}1\ n) \in S_n$ und betrachte $\pi(n)$.

Aufgabe 16. Für $n \geq 1$ seien die beiden folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$ gegeben:

$$a := \begin{pmatrix} \cos(\pi/n) & \sin(\pi/n) \\ -\sin(\pi/n) & \cos(\pi/n) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(a) = \det(b) = 1$, also $a, b \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

(a) Zeigen Sie: $a^n = b^2 = -I_2$ und $ba = a^{-1}b$. Schließen Sie damit, dass $\mathrm{Dic}_n := \langle a, b \rangle \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine Untergruppe der Ordnung $4n$ ist. (Hier steht "Dic" für "dicyclic".)

(b) Zeigen Sie: Dic_1 ist zyklisch und Dic_2 ist die Quaternionengruppe Q_8 in Beispiel 3.10 der Vorlesung.

(c) Sei $n = 3$; also $|\mathrm{Dic}_3| = 12$. Zeigen Sie, dass Dic_3 keine Diedergruppe ist und auch nicht isomorph zu A_4 ist.

(d) Zeigen Sie: Für $n \geq 2$ ist $-I_2$ das einzige Element der Ordnung 2 in Dic_n und es gilt $Z(\mathrm{Dic}_n) = \{\pm I_2\}$; außerdem ist $\mathrm{Dic}_n/\{\pm I_2\}$ eine Diedergruppe der Ordnung $2n$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 12 entweder eine Diedergruppe oder isomorph zu einer der Gruppen A_4 oder Dic_3 ist. Siehe auch
`https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_kleiner_Gruppen`