9. Übung zur Algebra

Dr. L. Iancu, WiSe 2020

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Das Polynom $X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel.

(b) Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ Körper mit p Elementen. Sei $G := \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_p^\times\}$. Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von $\mathbb{F}_p^\times$ ist mit $[\mathbb{F}_p^\times : G] \leq 2$. Schließen Sie daraus: Sind $y_1, y_2 \in \mathbb{F}_p^\times$ mit $y_1 y_2 \notin G$, so folgt $y_1 \in G$ oder $y_2 \in G$.

(c) Schließen Sie mit Hilfe von (b), dass $X^4 + \bar{1} \in \mathbb{F}_p[X]$ für jede Primzahl p reduzibel ist.

[*Hinweis zu (b):* $\mathbb{F}_p^\times$ ist zyklisch; siehe Beispiel 12.9 der Vorlesung. *Hinweis zu (c):* Behandeln Sie $p = 2$ separat. Sei nun $p \geq 3$. Gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $\bar{a}^2 = y_1 := \bar{2}$, so gilt $X^4 + \bar{1} = (X^2 + \bar{1})^2 - \bar{2}X^2 = (X^2 + 1 + \bar{a}X)(X^2 + 1 - \bar{a}X)$. Verfahren Sie ähnlich für den Fall, dass es ein $b \in \mathbb{Z}$ gibt mit $\bar{b}^2 = y_2 := -\bar{1}$, oder ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $\bar{c}^2 = -\bar{2}$. Für weitere Hinweise und alternative Beweismöglichkeiten siehe auch `https://math.stackexchange.com/questions/427439/`]

Aufgabe 2. (Schriftlich, 9 Punkte) Für $n \geq 1$ sei $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ das n-te Kreisteilungspolynom mit $\mathrm{Grad}(\Phi_n) = \phi(n)$, wie in der Vorlesung.

(a) Zeigen Sie: Ist $n > 1$ ungerade, so gilt $\Phi_{2n} = \Phi_n(-X)$.
Zum Beispiel: $\Phi_3 = X^2 + X + 1$ und $\Phi_6 = X^2 - X + 1 = \Phi_3(-X)$.

(b) Finden Sie eine explizite Formel für Φ_n für den Fall, dass n eine Potenz von 2 ist.

(c) Sei $n > 1$. Zeigen Sie: $\Phi_n(0) = 1$ und $\Phi_n(1) = \begin{cases} p & \text{falls } n = p^i \text{ mit } i \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ Primzahl,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

[*Hinweis:* Benutze die Formel $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$.]

Aufgabe 3. (Schriftlich, 6 Punkte)
(a) Sei R faktoriell und K Quotientenkörper von R. Sei $0 \neq f \in R[X]$ normiert mit $\mathrm{Grad}(f) \geq 1$. Zeigen Sie: Ist $\alpha \in K$ eine Nullstelle von f, so folgt $\alpha \in R$.

(b) Seien nun $R = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$ und $0 \neq f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie: Ist $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ (gekürzter Bruch) eine Nullstelle von f, so gilt $a \mid a_0$ und $b \mid a_n$.

Aufgabe 4. Für jedes der folgenden Polynome bestimmen Sie eine Zerlegung als Produkt von irreduziblen Polynomen.

(i) $X^4 + 1$ in $\mathbb{R}[X]$; **(ii)** $X^7 + 11X^3 - 33X + 22$ in $\mathbb{Q}[X]$;
(iii) $X^3 + X^2 + X + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$; **(iv)** $X^3 - 7X^2 + 3X + 3$ in $\mathbb{Q}[X]$;
(v) $X^3 + X + 763$ in $\mathbb{Z}[X]$: **(vi)** $X^4 + 4X^2 + 3$ in $\mathbb{Z}[X]$;
(vii) $X^5 + X^2 + X + 2$ in $\mathbb{Q}[X]$; **(viii)** $X^5 - X - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$;
(ix) $2X^5 + 15X^4 + 9X^3 + 3$ in $\mathbb{Z}[X]$; **(x)** $X^4 + 15X^3 + 7$ in $\mathbb{Q}[X]$;
(xi) $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$; **(xii)** $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ in $\mathbb{R}[X]$;
(xiii) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$; **(xiv)** $X^5 + 5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 25X + 26$ in $\mathbb{Z}[X]$.

[*Hinweis:* In einigen Fällen hilft es, anstelle des gegebenen Polynoms f das Polynom $f(X \pm 1)$ zu betrachten.]

Wir wünschen Ihnen schöne Feiertage und alles Gute für das Neue Jahr!

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Bis Mittwoch, den 13.01., vor den Übungsgruppen.